TEORÍA ALGEBRAICA DE NÚMEROS • **Grado en Matemáticas**

(Parcial 2 : 10-12-2018) **Curso 2018-2019**

APELLIDOS, NOMBRE: ____

1	2	3	4	5	6	TOTAL
15 pts	10 pts	10 pts	10 pts	20 pts	15 pts	**80 pts**

---

1. Sea $K = \mathbb{Q}(\theta)$ un cuerpo de números tal que $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\theta]$. Sea $f_\theta(x) \in \mathbb{Z}[x]$ el polinomio mínimo de θ. Sea $p \in \mathbb{N}$ un primo y

$$\overline{f_\theta(x)} = \overline{f_1}(x)^{e_1} \cdots \overline{f_r}(x)^{e_r} \pmod{p},$$

la factorización en polinomios irreducibles en $\mathbb{F}_p[x]$ de $f_\theta(x)$. Sea $f_i(x) \in \mathbb{Z}[x]$ un representante de $\overline{f_i}(x)$. Denotamos por

$$\mathfrak{P}_i := \langle p, f_i(\theta) \rangle \subset \mathcal{O}_K.$$

Demostrar:

a) Si $g_i(x) \in \mathbb{Z}[x]$ es otro representante de $\overline{f_i}(x)$, entonces $\langle p, f_i(\theta)\rangle = \langle p, g_i(\theta)\rangle$.

b) $\mathrm{N}_K(\mathfrak{P}_i) = p^{\deg f_i}$.

---

2. Sean las igualdades

$$15 = 3 \cdot 5 = (1 + \sqrt{-14})(1 - \sqrt{-14})$$

a) Utilizar las igualdades anteriores para demostrar que $\mathbb{Z}[\sqrt{-14}]$ no es un D.F.U.

b) Demostrar que las factorizaciones anteriores de 15 provienen de diferentes agrupamientos de la factorización en ideales primos de $15\mathcal{O}_K$.

---

3. Encontrar todos los ideales de $\mathbb{Z}[\sqrt{-14}]$ que contienen el elemento 42.

---

4. Encontrar todos los ideales de $\mathbb{Z}[\sqrt{-14}]$ con norma 30.

---

5. Sea $\mathcal{H}$ el grupo de clase de $\mathbb{Z}[\sqrt{-14}]$. Calcular:

a) Número de clase de $\mathbb{Q}[\sqrt{-14}]$.

b) Representantes de los elementos de $\mathcal{H}$.

c) La estructura como grupo abeliano de $\mathcal{H}$.

d) La tabla de Cayley del grupo $\mathcal{H}$.

---

6. Calcular todas las soluciones enteras de la ecuación de Mordell $y^2 + 56 = x^3$.

◇◇◇◇◇◇ **Razonar debidamente las respuestas** ◇◇◇◇◇◇