TEORÍA ALGEBRAICA DE NÚMEROS

(Parcial 1 : 12-11-2018)

Grado en Matemáticas
Curso 2018-2019

Apellidos, Nombre: ____

---

1. Sea $K = \mathbb{Q}(\theta)$ un cuerpo de números y $\alpha \in K$. Definimos:

$$m_\alpha : K \to K\,, \qquad m_\alpha(x) = \alpha \cdot x$$

Demostrar:

a) m_α es una aplicación de $\mathbb{Q}$-espacios vectoriales.

b) Si $f_{m_\alpha}(x)$ denota el polinomio característico de m_α, entonces $f_{m_\alpha}(\alpha) = 0$.

c) Si $f_\theta(x)$ denota el polinomio mínimo de θ, entonces $f_{m_\theta} = f_\theta$.

d) $\mathrm{Traza}(m_\alpha) = \mathrm{Tr}_K(\alpha)$ y $\mathrm{Det}(m_\alpha) = \mathrm{N}_K(\alpha)$.

---

2. Sea K un cuerpo de números y $\mathfrak{P} \subset \mathcal{O}_K$ un ideal primo. Demostrar:

a) Existe un único primo $p \in \mathbb{Z}$ tal que $p \in \mathfrak{P}$.

b) Existe un entero positivo $f \in \mathbb{Z}$ tal que $\mathrm{N}_K(\mathfrak{P}) = p^f$.

---

3. Sea K un cuerpo de números y $\alpha, \beta \in \mathcal{O}_K$ no nulos. Demostrar que si $\alpha \,|\, \beta$, entonces $\langle \beta \rangle \subseteq \langle \alpha \rangle$. ¿En que caso se da $\langle \beta \rangle = \langle \alpha \rangle$?

---

4. Sea K un cuerpo de números y $\alpha \in K$. Demostrar:

a) Si $[K : \mathbb{Q}] = 2$, $\alpha \in \mathcal{O}_K$ si y sólo si $\mathrm{Tr}_K(\alpha), \mathrm{N}_K(\alpha) \in \mathbb{Z}$.

b) Si $[K : \mathbb{Q}] > 2$, entonces la anterior equivalencia no es cierta.

---

5. Sea $K = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$. Calcular $\Delta[1, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4}]$.

---

6. Sea $\theta \in \overline{\mathbb{Q}}$ tal que $\theta^3 + \theta + 1 = 0$ y $K = \mathbb{Q}(\theta)$. Calcula una base entera de $\mathcal{O}_K$.

---

7. Determinar las soluciones de $x^4 + x^3 + 2x^2 + x \equiv 13 \pmod{343}$.

---

8. Determinar las condiciones que debe de satisfacer un primo impar p para que -7 sea residuo cuadrático módulo p.

◇◇◇◇◇◇ **Razonar debidamente las respuestas** ◇◇◇◇◇◇