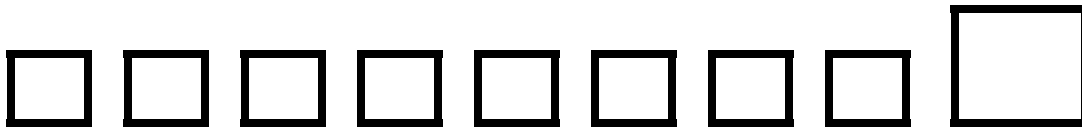


APELLIDOS, NOMBRE: \_\_\_\_\_



1. Sea  $K = \mathbb{Q}(\theta)$  un cuerpo de números y  $\alpha \in K$ . Definimos:

$$m_\alpha : K \rightarrow K, \quad m_\alpha(x) = \alpha \cdot x$$

Mostrar:

- a)  $m_\alpha$  es una aplicación de  $\mathbb{Q}$ -espacios vectoriales.
- b) Si  $f_{m_\alpha}(x)$  denota el polinomio característico de  $m_\alpha$ , entonces  $f_{m_\alpha}(\alpha) = 0$ .
- c) Si  $f_\theta(x)$  denota el polinomio mínimo de  $\theta$ , entonces  $f_{m_\theta} = f_\theta$ .
- d)  $\text{Traza}(m_\alpha) = \text{Tr}_K(\alpha)$  y  $\text{Det}(m_\alpha) = N_K(\alpha)$ .

2. Sea  $K$  un cuerpo de números y  $\mathfrak{P} \subset \mathcal{O}_K$  un ideal primo. Demostrar:

- a) Existe un único primo  $p \in \mathbb{Z}$  tal que  $p \in \mathfrak{P}$ .
- b) Existe un entero positivo  $f \in \mathbb{Z}$  tal que  $N_K(\mathfrak{P}) = p^f$ .

3. Sea  $K$  un cuerpo de números y  $\alpha, \beta \in \mathcal{O}_K$  no nulos. Demostrar que si  $\alpha \mid \beta$ , entonces  $\langle \beta \rangle \subseteq \langle \alpha \rangle$ . ¿En que caso se da  $\langle \beta \rangle = \langle \alpha \rangle$ ?

4. Sea  $K$  un cuerpo de números y  $\alpha \in K$ . Demostrar:

- a) Si  $[K : \mathbb{Q}] = 2$ ,  $\alpha \in \mathcal{O}_K$  si y sólo si  $\text{Tr}_K(\alpha), N_K(\alpha) \in \mathbb{Z}$ .
- b) Si  $[K : \mathbb{Q}] > 2$ , entonces la anterior equivalencia no es cierta.

5. Sea  $K = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ . Calcular  $\Delta[1, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4}]$ .

6. Sea  $\theta \in \overline{\mathbb{Q}}$  tal que  $\theta^3 + \theta + 1 = 0$  y  $K = \mathbb{Q}(\theta)$ . Calcula una base entera de  $\mathcal{O}_K$ .

7. Determinar las soluciones de  $x^4 + x^3 + 2x^2 + x \equiv 13 \pmod{343}$ .

8. Determinar las condiciones que debe de satisfacer un primo impar  $p$  para que  $-7$  sea residuo cuadrático módulo  $p$ .

◆◆◆◆◆ Razonar debidamente las respuestas ◆◆◆◆◆