TEORÍA ALGEBRAICA DE NÚMEROS • **Grado en Matemáticas**

(Examen Ordinario : 18-1-2019) **Curso 2018-2019**

APELLIDOS, NOMBRE: ______________________________

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	TOTAL
5 pts	10 pts	10 pts	10 pts	10 pts	10 pts	15 pts	10 pts	10 pts	15 pts	**105 pts**

1. Calcular $\left(\dfrac{3780}{37}\right)$.

2. Determinar las soluciones de $x^3 - 2x \equiv 1 \pmod{125}$.

3. Demostrar que el anillo de enteros del cuerpo cuadrático $\mathbb{Q}(\sqrt{-6})$ no es un DFU sin utilizar su número de clase.

4. Encontrar todos los ideales de $\mathbb{Z}[\sqrt{-6}]$ con norma 210.

5. Encontrar todos los ideales de $\mathbb{Z}[\sqrt{-6}]$ que contienen el elemento 90.

6. Calcular la factorización en ideales primos de $\mathbb{Z}[\sqrt{-6}]$ del ideal $\langle 2 + \sqrt{-6}\rangle$.

7. Sea $\mathcal{H}$ el grupo de clase de $\mathbb{Z}[\sqrt{-6}]$. Calcular:

a) Número de clase de $\mathbb{Q}[\sqrt{-6}]$.

b) Representantes de los elementos de $\mathcal{H}$.

c) La estructura como grupo abeliano de $\mathcal{H}$.

8. Encuentra todas las soluciones enteras de la ecuación diofántica: $x^{20} + y^{20} = z^2$.

9. Encuentra todos los enteros $x, y, z \in \mathbb{Z}$ tal que $x^5 + y^5 = z^{10}$ y 5 no divide a xyz.

10. Sea $K = \mathbb{Q}(\theta)$ un cuerpo de números de grado 3 con $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\theta]$ y $f_\theta(x)$ el polinomio mínimo de θ.

a) Demostrar que si $f_\theta(x) = (x - \theta_1)(x - \theta_2)(x - \theta_3)$ entonces

$$\Delta_K = \prod_{1 \le i < j, \le 3} (\theta_i - \theta_j)^2.$$

b) Demostrar que $f_\theta(x)$ tiene tres raíces reales si y sólo si $\Delta_K > 0$.

c) Calcular el grupo de clases de ideales $\mathcal{H}_K$ para $f_\theta(x) = x^3 + x + 1$.

◇◇◇◇◇◇ **Razonar debidamente las respuestas** ◇◇◇◇◇◇