ÁLGEBRA LINEAL Y GEOMETRÍA • **Grado en Matemáticas** • **Grupo 71_**

(Examen Ordinario : 25-5-2018) **Curso 2017-2018**

Apellidos: ______________________________ Nombre: ____________________

Ejercicio 1	Ejercicio 2	Ejercicio 3	Ejercicio 4	Ejercicio 5	Ejercicio 6	TOTAL
15 puntos	15 puntos	20 puntos	20 puntos	15 puntos	15 puntos	100

Los apartados de cada ejercicio no necesariamente tienen la misma puntuación.

⋄⋄⋄⋄⋄⋄ **Razonar debidamente las respuestas** ⋄⋄⋄⋄⋄⋄

Dispones de 3 horas para hacer el examen.

---

1. Estudia si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifica tu repuesta.
(Recuerda que si la afirmación es verdadera hay que dar una demostración mientras que si la afirmación es falsa es suficiente con dar un contraejemplo):

Sea V un espacio euclideo de dimensión finita. Entonces:

a) $\mathrm{Ker}(f)$ es ortogonal a $\mathrm{Im}(f)$, para toda aplicación $f : V \longrightarrow V$ autoadjunta.

b) $\|u\| \leq \text{máx}\{\|u+v\|, \|u-v\|\}$ para cualesquiera $u, v \in V$.

c) Existe un subespacio vectorial $F \subset V$ tal que $P_F^\perp - P_{F^\perp}^\perp$ es no invertible (donde $P_W^\perp$ denota la proyección ortogonal sobre el subespacio vectorial $W \subset V$).

---

2. Sea W el espacio vectorial en $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores $u_1 = (0,1,0,1)$ y $u_2 = (1,0,1,-2)$ (cuyas coordenadas están dadas respecto a la base canónica).

a) Halla una base ortogonal de W con el producto escalar usual de $\mathbb{R}^4$.

b) Calcula la proyección ortogonal de $\mathbb{R}^4$ sobre W, indicando su matriz en la base canónica de $\mathbb{R}^4$.

---

3. Consideremos la afinidad $f_a : \mathbb{A}^3(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ dada por

$$f_a \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1/3 & -2/3 & 2/3 \\ -2/3 & -1/3 & -2/3 \\ 2/3 & -2/3 & -1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \qquad a \in \mathbb{R}.$$

a) Demuestra que es un movimiento y clasifícalo en función del parámetro a.

b) Indica sus elementos geométricos principales para $a = 1$.

Continúa en la cara posterior

4. Dadas las siguientes variedades lineales de $\mathbb{A}^4(\mathbb{R})$:

$$L_1 = (1,1,0,0) + \mathcal{L}(\{(1,-1,-1,0),(0,1,-1,0),(0,1,1,1)\}) \qquad y \qquad L_2 : \begin{cases} 2x + z = 3, \\ 2t - y = 1. \end{cases}$$

a) Calcula las ecuaciones implícitas de L_1 (con respecto al sistema de referencia canónico).

b) Determina la posición relativa entre L_1 y L_2.

c) Calcula la distancia entre L_1 y L_2.

---

5. Considera la cónica definida por la ecuación:

$$4x^2 + 4xy + 7y^2 + 12y \ = \ 0\ .$$

a) Determina el tipo de cónica.

b) Describe, en las coordenadas originales, los elementos geométricos de la cónica:

- Parábola: Foco, vértice, eje principal y directriz.
- Elipse: Focos, centro y ejes principales.
- Hipérbola: Focos, centro, ejes principales y asíntotas.

---

6. Sea $a \in \mathbb{R}$ y consideramos la cuádrica definida por

$$\mathcal{Q}_a \ : \ x^2 + 6xy + (3+a)y^2 + az^2 + 4z + 3 = 0.$$

Determina los valores de $a \in \mathbb{R}$ tales que

a) $\mathcal{Q}_a$ es un elipsoide.

b) $\mathcal{Q}_a$ es un hiperboloide de una hoja.

c) $\mathcal{Q}_a$ es un hiperboloide de dos hojas.

d) $\mathcal{Q}_a$ es un paraboloide elíptico.

e) $\mathcal{Q}_a$ es un paraboloide hiperbólico.
