Geometría Afín II:
Posición relativa de variedades lineales. Operaciones con variedades lineales.

1. Considera el siguiente par de rectas del espacio afín $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$:

$$r = (1,0,1) + \langle(1,\alpha,0)\rangle, \quad \text{y} \quad s = (1,1,2) + \langle(1,1,\beta)\rangle.$$

a) Estudia la posición relativa r y s dependiendo de los valores de α y β.

b) Describe la variedad lineal $r+s$ dependiendo de los valores de α y β.

2. En $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$, considera los conjuntos

$$L = \{(x,y,z) : x+2y-z=1\} \quad \text{y} \quad M = \{(x,y,z) : x-y+2z=2 \text{ y } x-z=1\}.$$

a) Demuestra que L y M son variedades lineales.

b) Determina si L y M se cortan, son paralelas, o se cruzan. Si se cortan, halla su intersección.

3. En $\mathbb{A}^4(\mathbb{R})$, considera los conjuntos

$$L_1 = \{(x,y,z,w) : x=1, y=2\} \quad \text{y} \quad L_2 = \{(x,y,z,w) : z=-2, w=3\}.$$

a) Demuestra que L_1 y L_2 son variedades lineales.

b) Determina si L_1 y L_2 se cortan, son paralelas, o se cruzan. Si se cortan, halla su intersección.

4. En el espacio afín $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ estudia la posición relativa de las variedades lineales

$$L_1 = (1,0,0) + \langle(0,2,1)\rangle, \quad \text{y} \quad L_2 = \{(x,y,z) : x+2y+z=1\}.$$

Describe las variedades lineales intersección y suma.

5. Considera la familia de planos $2\lambda x + (\lambda+1)y - 3(\lambda-1)z + 2\lambda - 4 = 0$ en $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$.

a) Demuestra que estos planos tienen una recta en común.

b) Determina los planos de la familia que pasan por el punto $(1,-1,2)$.

c) Determina los planos de esta familia que son paralelos a la recta:

$$L = \{x+3z-1=0, y-5z+2=0\}.$$

6. Encuentra, si existe, la recta que corta a las rectas

$$s = \begin{cases} x-y+z=0 \\ x+2y+3z+4=0 \end{cases} \qquad \text{y} \qquad t = \begin{cases} x+y+3z-1=0 \\ x+2z-5=0 \end{cases},$$

y pasa por $P=(1,6,-3)$.

7. Consideremos las rectas $L_1 = \{x + y + z = x + 2y = 0\}$, $L_2 = \{2x + 2y + z = 3,\ x + y = 2\}$ y $L_3 = \{3x + 2y + 2z = 2,\ 2x + y + z = 0\}$ del espacio afín $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$.

a) Demuestra que se cruzan dos a dos.

b) ¿Existe algún plano π paralelo a las tres rectas?

8. Decide, de manera razonada, si los siguientes resultados son verdaderos o falsos:

a) Dos rectas paralelas en $\mathbb{A}^n(\mathbb{R})$ o bien son coincidentes, o bien no se cortan.

b) Dos rectas en $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ que no se cortan deben ser paralelas.

c) En $\mathbb{A}^n(\mathbb{R})$ con $n \geq 3$ dos rectas que no se cortan no tienen por qué ser paralelas.

9. Sea $\mathbb{A}$ un espacio afín de dimensión n y $L_1, L_2 \subset \mathbb{A}$ subespacios afines. Demuestra que si la dimensión de L_1 es $n-1$ y la dimensión de $L_2 \geq 1$, entonces L_1 y L_2 no se pueden cruzar.

10. En el espacio afín $(\mathcal{A}, V, \varphi)$ de dimensión n, sean $L_1 = a_1 + V_1$ y $L_2 = a_2 + V_2$ dos subespacios afines. Demuestra que si $V = V_1 \oplus V_2$, entonces L_1 y L_2 se cortan en un punto.

11. Sea $\mathbb{A}$ un espacio afín de dimensión n y $L, M \subset \mathbb{A}$ dos variedades lineales tal que $L + M = \mathbb{A}$, $L, M \neq \mathbb{A}$, y supongamos que $\dim(L) + \dim(M)$ es la mínima posible con esta propiedad.

a) Describe las dimensiones de L y M así como su posición relativa en el caso de $n = 2, 3$ y 4.

b) Conjetura un resultado para n arbitrario. Intenta demostrarlo.

12. Sea $\mathbb{A}$ un espacio afín de dimensión n y $L, M \subset \mathbb{A}$ dos hiperplanos que no son paralelos. Calcula la dimensión de $L \cap M$.