

Espacios euclídeos y hermíticos II.
 Ortogonalidad. Gram-Schmidt. Complemento ortogonal

1. Sea V un espacio vectorial euclídeo y $u, v \in V$. Demuestra que:

- a) Los vectores $u + v$ y $u - v$ son ortogonales si y sólo si $\|u\| = \|v\|$.
- b) Los vectores u y v son ortogonales si y sólo si $\|u + \lambda v\| \geq \|u\|$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

¿Valen las equivalencias anteriores en un espacio hermítico?

2. Sea V un espacio euclídeo o hermítico y $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$. Demuestra la siguiente generalización del teorema de Pitágoras: Si v_1, v_2, \dots, v_n son ortogonales dos a dos, entonces

$$\|v_1 + v_2 + \dots + v_n\|^2 = \|v_1\|^2 + \|v_2\|^2 + \dots + \|v_n\|^2.$$

¿Es cierto el recíproco?

3. Sea $\mathbb{R}_n[x] = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] : \text{grado}(p(x)) \leq n\}$ para un cierto $n \in \mathbb{N}$. Definimos en $\mathbb{R}_n[x] \times \mathbb{R}_n[x]$ la aplicación

$$\phi(p(x), q(x)) = \int_{-1}^1 p(t)q(t)dt.$$

- a) Demuestra que ϕ es un producto escalar.
- b) Describe el subespacio de polinomios ortogonales al polinomio x .
- c) Calcula una base ortonormal de $\mathbb{R}_3[x]$.

4. Considera la forma bilineal $\psi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$\psi((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

- a) Decide de manera razonada si ψ es un producto escalar.
- b) Encuentra una base de \mathbb{R}^3 respecto a la que la matriz de ψ sea diagonal.

5. Sea $V = \mathbb{C}^3$ y sea $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base estándar. Sea $\varphi : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ la forma sesquilineal cuya matriz asociada respecto a \mathcal{B} es:

$$\begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ -i & 2 & 1+i \\ 0 & 1-i & 3 \end{pmatrix}$$

- a) Demuestra que φ es un producto hermítico.
- b) Calcula una base ortonormal de V respecto al producto escalar definido por φ .

6. Sean $u_1 = (-2, -1, 1)$, $u_2 = (0, -1, 0)$ y $u_3 = (1, -1, 0)$ vectores de \mathbb{R}^3 .

a) Demuestra que $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$ es una base de \mathbb{R}^3 .

b) Demuestra que existe un producto escalar ϕ respecto al cual \mathcal{B} es una base ortogonal. Decide de manera razonada si ϕ es único con esta propiedad.

c) Demuestra que existe un producto escalar ψ respecto al cual \mathcal{B} es una base ortonormal. Decide de manera razonada si ψ es único con esta propiedad. Describe la matriz de ψ respecto a la base canónica de \mathbb{R}^3 .

7. En \mathbb{R}^3 encuentra un producto escalar para el cual el complemento ortogonal del plano $x = 0$ sea la recta $\{x = y, z = 0\}$. ¿Es único ese producto escalar?

8. Calcula el complemento ortogonal del subespacio

$$W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, 2x_1 - x_2 = 0\},$$

cuando se considera en \mathbb{R}^4 el producto escalar usual.

9. Calcula el complemento ortogonal de la recta $L = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 = x_2 = x_3\}$ respecto a:

a) el producto escalar habitual;

b) el siguiente producto escalar

$$\phi((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1 y_1 + (x_1 + x_2)(y_1 + y_2) + (x_1 + x_2 + x_3)(y_1 + y_2 + y_3).$$

10. En \mathbb{R}^3 , se considera el producto escalar con matriz en la base canónica:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

a) Calcula una base ortonormal $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$.

b) Sea W el subespacio ortogonal al vector de coordenadas $(2, 0, 1)_{\mathcal{B}}$. Describe W en las coordenadas de la base canónica.

11. Sean V un espacio vectorial euclídeo o hermitico de dimensión finita y W_1, W_2 dos subespacios vectoriales de V . Demuestra que

$$(W_1 + W_2)^\perp = W_1^\perp \cap W_2^\perp \quad \text{y que} \quad (W_1 \cap W_2)^\perp = W_1^\perp + W_2^\perp.$$