Geometría Euclídea I:
Distancias.

1. En el espacio afín $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ con su estructura euclídea usual, calcula la distancia entre las rectas r y s que vienen dadas en un sistema de referencia ortonormal por las siguientes ecuaciones implícitas:

$$r : \begin{cases} x - y = 2 \\ x + z = 1 \end{cases} \qquad \text{y} \quad s : \begin{cases} x + y + z = 3 \\ x - 2z = -1 \end{cases} \quad .$$

Halla un punto $p \in r$ y un punto $q \in s$ tales que $d(r, s) = d(p, q)$. ¿Son únicos los puntos p y q?

2. El el espacio afín $\mathbb{A}^4(\mathbb{R})$ con su estructura euclídea usual, calcula la distancia entre los espacios afines L_1 y L_2 que vienen dadas en un sistema de referencia ortonormal por las siguientes ecuaciones implícitas:

$$L_1 : \begin{cases} x + z + t = 1 \\ y - z - t = 2 \end{cases} \qquad \text{y} \quad L_2 : \begin{cases} x + y = 1 \\ y - z - 3t = 3 \end{cases} \quad .$$

Halla puntos $p \in L_1$ y $q \in L_2$ tales que $d(L_1, L_2) = d(p, q)$. ¿Son únicos esos puntos p y q?

3. Halla una fórmula, en función de α y β, para calcular la distancia entre las rectas del espacio afín $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ con su estructura euclídea usual:

$$r := (1, 0, 1) + \langle (1,\ \alpha,\ 0) \rangle \quad \text{y} \quad s := (1, 1, 2) + \langle (1,\ 1,\ \beta) \rangle \,.$$

4. En $\mathbb{R}^3$, considera el producto escalar cuya matriz con respecto a la base canónica es:

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Calcula la distancia del punto $(1, 1, -2)$ al plano que pasa por los puntos de coordenadas cartesianas $a = (1, -1, 1)$, $b = (1, 1, 1)$ y $c = (2, -1, 2)$ en la referencia canónica.

5. Sean L_1 y L_2 dos rectas que se cruzan en $\mathbb{R}^3$, sobre el que consideramos el producto escalar usual.

a) Demuestra que existe una única recta L que corta a L_1 y a L_2 y que es ortogonal a ambas.

b) Sean $P_1 = L \cap L_1$ y $P_2 = L \cap L_2$. Demuestra que

$$d(L_1, L_2) = d(P_1, P_2).$$

c) Sean $A_1, A_2, u_1, u_2 \in \mathbb{R}^3$ (dados en coordenadas con respecto al sistema de referencia canónico) tales que $L_i = A_i + \mathcal{L}(u_i)$. Demostrar, que si denotamos por $v = \overrightarrow{A_1A_2}$, se tiene:

$$d(L_1, L_2) = \frac{|\det(v, u_1, u_2)|}{\|u_1 \times u_2\|}.$$