SOLUCIONES

1. (10 puntos) Sea $(V, \langle , \rangle)$ un espacio euclideo o hermítico.
Estudia si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifica tu repuesta. (Recuerda que si la afirmación es verdadera hay que dar una demostración mientras que si la afirmación es falsa es suficiente con dar un contraejemplo):

a) Si $f : V \to V$ es una aplicación lineal, entonces $\varphi(u, v) = \langle f(u), f(v)\rangle$ define un producto escalar o hermítico en V.

b) Existen $u, v \in V$, $u \neq v$ de manera que $\|u\|^2 = \|v\|^2 = \langle u, v\rangle$.

c) Si V es euclideo y $u, v \in V$ cumplen $\|u\| = \|v\|$, se tiene que $u + v$ es ortogonal a $u - v$.

d) Si V es hermítico y $u, v \in V$ cumplen $\|u\| = \|v\|$, se tiene que $u + v$ es ortogonal a $u - v$.

SOLUCIÓN:

a) FALSO. Se puede demostrar que la forma φ define una forma bilineal o hermítica dependiendo de si V es un espacio euclídeo o hermítico. Esto es debido a la linealidad de f. Pero φ no es definida positiva en general. Ya que debería de cumplir $\varphi(u, u) = \|f(u)\|^2 \neq 0$ si $u \neq 0$. Basta tomar la función identicamente 0: $f(v) = 0$, para todo $v \in V$.

b) FALSO. Veamos que si $\|u\|^2 = \|v\|^2 = \langle u, v\rangle$ entonces $u = v$:

$$\left.\begin{array}{l}\|u\|^2 = \langle u, v\rangle \\ \|v\|^2 = \langle u, v\rangle\end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{l}\langle u, u\rangle = \langle u, v\rangle \\ \langle v, v\rangle = \langle u, v\rangle\end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l}\langle u, u - v\rangle = 0 \\ \langle v - u, v\rangle = 0 \overset{(*)}{\Longrightarrow}\end{array} \left.\begin{array}{l}\langle u, u - v\rangle = 0 \\ \langle v, u - v\rangle = 0\end{array}\right\} \overset{(**)}{\Longrightarrow} u = v$$

(*) Como $\langle v - u, v\rangle = 0$ tenemos que $0 = -\overline{\langle v - u, v\rangle} = \langle v, u - v\rangle$.
(**) Obtenemos $\langle u - v, u - v\rangle = 0$, es decir $\|u - v\| = 0$ y como $\langle , \rangle$ es definida positiva, deducimos $u = v$.
Otra forma: En primer lugar se observa que $\langle v, u\rangle = \langle u, v\rangle$ debido a que $\langle u, v\rangle = \|u\|^2$ es un número real. Ahora

$$\|u - v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - \langle u, v\rangle - \langle v, u\rangle = 2\|u\|^2 - 2\langle u, v\rangle = 0.$$

Finalmente como $\langle , \rangle$ es definida positiva, deducimos $u = v$.
Otra forma 2: Bastaba dar un contraejemplo. Supongamos $V = \mathbb{R}^2$. Utilizando la definición de producto escalar usual en $\mathbb{R}^2$ se tiene que si θ es el ángulo entre dos vectores $u, v \in \mathbb{R}^2$:

$$\langle u, v\rangle = \|u\| \cdot \|v\| \cos\theta.$$

Entonces la condición $\|u\|^2 = \|v\|^2 = \langle u, v\rangle$ nos dice que $\theta = 0$, junto con $\|u\| = \|v\|$ obtenemos $u = v$.

c) VERDADERO. Tenemos que ver que $\langle u + v, u - v\rangle = 0$. Veámoslo

$$\langle u + v, u - v\rangle = \langle u, u\rangle - \langle u, v\rangle + \langle v, u\rangle - \langle v, v\rangle = 0,$$

ya que $\|u\| = \|v\|$, y por ser V euclideo: $\langle v, u\rangle = \langle u, v\rangle$.

d) FALSO. Basta tomar $V = \mathbb{C}$, $u = 1$ y $v = i$. Así tenemos $\|u\| = \|v\| = 1$ y

$$\langle u + v, u - v\rangle = \langle 1 + i, 1 - i\rangle = (1 + i)^2 = 2i \neq 0.$$

2. Sea $(V, \langle , \rangle)$ un espacio euclideo o hermítico, y $\{u_1, \ldots, u_k\} \subset V$ un conjunto de vectores ortonormales dos a dos. Demostrar que para todo $v \in V$ se tiene la siguiente desigualdad:

$$\sum_{i=1}^{k} |\langle v, u_i \rangle|^2 \leq \|v\|^2.$$

a) (15 puntos) $\dim(V) < \infty$.

b) (5 puntos) $\dim(V) = \infty$.

SOLUCIÓN:

a) El conjunto de vectores ortonormales $\{u_1, \ldots, u_k\}$ se completa a una base ortonormal de V (dim (V)=n) para tener $\mathcal{B} = \{u_1, \ldots, u_k, u_{k+1}, \ldots, u_n\}$ base ortonormal de V. Si $v \in V$, $v = \sum_{j=1}^{n} \langle v, u_j \rangle u_j$ por ser $\mathcal{B}$ base ortonormal de V. Entonces,

$$\|v\|^2 = \langle \sum_{j=1}^{n} \langle v, u_j \rangle u_j, \sum_{j=1}^{n} \langle v, u_j \rangle u_j \rangle = \sum_{j=1}^{n} |\langle v, u_j \rangle|^2 \geq \sum_{j=1}^{k} |\langle v, u_j \rangle|^2 \,.$$

b) En dimensión infinita no se puede completar $\{u_1, \ldots, u_k\}$ para tener una base ortornormal de V. En este caso, escribir $w = v - \sum_{j=1}^{k} \langle v, u_j \rangle u_j$ y calcular $\|w\|^2$. Si se hace con cuidado obtendrás

$$0 \leq \|w\|^2 = \langle v - \sum_{j=1}^{k} \langle v, u_j \rangle u_j, v - \sum_{j=1}^{k} \langle v, u_j \rangle u_j \rangle = \|v\|^2 - \sum_{j=1}^{k} |\langle v, u_j \rangle|^2 \,,$$

de donde se deduce el resultado deseado.

3. Considera en $\mathbb{R}^3$ la forma bilineal dada por

$$\phi((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)) = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3\,,$$

y los vectores $u_1 = (1,0,0), u_2 = (0,1,0), u_3 = (0,0,1)$, cuyas coordenadas están dadas en la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

a) (5 puntos) Prueba que ϕ define un producto escalar en $\mathbb{R}^3$ (no hace falta ver que es una forma bilineal).

b) (15 puntos) Utiliza el procedimiento de Gram-Schmidt, para ortogonalizar los vectores u_1, u_2 y u_3 con el producto escalar del enunciado.

c) (15 puntos) Halla la proyección ortogonal del vector $v = (1,0,1)$ sobre el subespacio W generado por los vectores u_1 y u_2 con el producto escalar del enunciado.

SOLUCIÓN:

a) La matriz de ϕ es $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Como $\Delta_1(A) = 2 > 0$, $\quad \Delta_2(A) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 > 0 \quad$ y $\quad \Delta_3(A) = |A| = 3 > 0$, por el criterio de Sylvester, ϕ define un producto escalar en $\mathbb{R}^3$.

b) Tomamos $v_1 = u_1$. Para v_2 escribimos $v_2 = u_2 + \alpha\, v_1$ y tenemos que calcular α para que se cumpla $\phi(v_2, v_1) = 0$. Como

$$\phi(v_2,v_1) = (\alpha,1,0)\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 2\alpha + 1\,,$$

se tiene $\alpha = -\dfrac{1}{2}$. Por tanto $v_2 = (-\dfrac{1}{2}, 1, 0)$. Para v_3 escribimos $v_3 = u_3 + \beta_1\, v_1 + \beta_2\, v_2$ y tenemos que calcular β_1, β_2 para que se cumpla

$$0 = \phi(v_3,v_1) = (\beta_1 - \frac{1}{2}\beta_2, \beta_2, 1)\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 2\beta_1\,,$$

$$0 = \phi(v_3,v_2) = (\beta_1 - \frac{1}{2}\beta_2, \beta_2, 1)\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\beta_2\,.$$

Por tanto, $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = 0$ y $v_3 = u_3 = (0,0,1)$.

c) Sea P_W la proyección ortogonal sobre W. Entonces $P_W(v) = \alpha\, u_1 + \beta\, u_2$ con $v - P_W(v) \perp W$. Por tanto,

$$0 = \phi(v - P_W(v), u_1) = (1-\alpha, -\beta, 1)\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 - 2\alpha - \beta\,,$$

$$0 = \phi(v - P_W(v), u_2) = (1-\alpha, -\beta, 1)\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 - \alpha - 2\beta\,.$$

El sistema de ecuaciones $\{2\alpha + \beta = 2,\ \alpha + 2\beta = 1\}$ tiene como sulución $\alpha = 1, \beta = 0$. Por tanto $P_W(v) = u_1 = (1,0,0)$.

Nota: Aprovechando que los vectores v_1, v_2 hallados en el apartado b) forman una base ortonormal de W también se puede usar la fórmula

$$P_W(v) = \frac{\phi(v,v_1)}{\phi(v_1,v_1)}v_1 + \frac{\phi(v,v_2)}{\phi(v_2,v_2)}v_2\,.$$

Es erróneo usar los vectores u_1, u_2 en esta fórmula, porque no son ortogonales.

En $\mathbb{R}^3$ considera la aplicación lineal cuya matriz con respecto a la base canónica es

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

d) (5 puntos) Comprueba que A define una aplicación ortogonal con respecto al producto escalar usual de $\mathbb{R}^3$.

e) (30 puntos) Identifica la aplicación ortogonal cuya matriz es A e indica sus elementos geométricos principales.

SOLUCIÓN:

a) Sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal tal que

$$A = M_{\mathcal{B}_c}(f).$$

Como $\mathcal{B}_c$ es una base ortonormal con respecto al producto escalar usual de $\mathbb{R}^3$ para ver que f es una aplicación ortogonal basta con ver que $A^t \cdot A = I_3$:

$$A^t \cdot A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

b) En primer lugar clasificamos que tipo de aplicación ortogonal es f. Observa que A no es simétrica (i.e. $A \neq A^t$). Por lo tanto, A corresponde o bien a una rotación en el caso en el que $|A| = 1$ o bien a una antirotación en el caso en el que $|A| = -1$. Calculamos el determinante de A y comprobamos que es 1. Por lo tanto sabemos que existe una base ortonormal $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ tal que

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ 0 & \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix},$$

donde u_1 es un autovector de f de autovalor 1 y u_2, u_3 forman una base del plano ortogonal a la recta generada por u_1 cumpliendo $u_3 = u_1 \times u_2$ (para así la orientación de $\mathcal{B}$ es la misma que la de $\mathcal{B}_c$).

• El ángulo de giro α se obtiene (salvo signo) mediante:

$$\cos\alpha = \frac{1}{2}(\text{Traza}A - 1) = \frac{1}{2}(2-1) = \frac{1}{2}.$$

Por lo tanto sabemos que el ángulo es $\alpha = \pi/3$ o $-\pi/3$. Para el signo de α necesitamos orientar el eje de giro y por tanto hallarlo. O lo que es equivalente calcular la base $\mathcal{B}$:

• El eje de giro se obtiene de $\mathrm{Ker(A - I_3)} = \mathcal{L}(\mathrm{v_1})$, donde $v_1 = (1,1,1)$. Así $u_1 = \frac{1}{3}(1,1,1)$.

• Ahora obtenemos un vector $u_2 \in \mathbb{R}^3$ tal que $u_2 \perp u_1$. Por ejemplo, $u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)$. Por último $u_3 \in \mathbb{R}^3$ tal que $u_3 \perp u_1$ y $u_3 \perp u_2$, de forma que $\{u_1, u_2, u_3\}$ formen una base con la misma orientación que la base canónica. Para ello hacemos:

$$u_3 = u_1 \times u_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,-2).$$

Utilizamos que

$$\operatorname{sen}\alpha = (Au_2) \cdot u_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

y junto con $\cos\alpha = 1/2$ deducimos que $\alpha = \pi/3$.

<u>CONCLUSIÓN</u>: Giro de ángulo $\pi/3$ con eje $\mathcal{L}(u)$, $u = (1,1,1)$, y con la orientación dada por el vector u.