SOLUCIONES

1. Sea $\mathbb{R}^4$ con el producto escalar habitual. Consideremos el subespacio vectorial

$$V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x - 2t = 0,\ y = 0\}.$$

a) Halla ecuaciones implícitas del complemento ortogonal de V.

b) Calcula la matriz con respecto a la base canónica de $P_V^{\perp}$ y de $P_{V^{\perp}}^{\perp}$. (Si W es un subespacion vectorial, $P_W^{\perp}$ denota la proyección ortogonal sobre W.)

SOLUCIÓN: a) En primer lugar calculamos una base de V, por ejemplo $B_V = \{u = (2, 0, 0, 1), v = (0, 0, 1, 0)\}$. Ahora basta observar que un vector $w \in \mathbb{R}^4$ es ortogonal a V si y sólo si $w \perp u$ y $w \perp v$. Por lo tanto $V^{\perp} = \{(x, y, z, t) : 2x + t = 0, z = 0\}$.

b) Sea $w = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. Entonces hay una escritura única: $w = P_V^{\perp}(w) + P_{V^{\perp}}^{\perp}(w)$. Además, por el apartado (a), $P_V^{\perp}(w) = \alpha(2, 0, 0, 1) + \beta(0, 0, 1, 0)$ para ciertos $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ que calcularemos a continuación. Como $w - P_V^{\perp}(w) = P_{V^{\perp}}^{\perp}(w)$ necesariamente,

$$((x, y, z, t) - \alpha(2, 0, 0, 1) - \beta(0, 0, 1, 0)) = (x - 2\alpha, y, z - \beta, t - \alpha) \perp V$$

lo cual sucede si y sólo si,

$$(x - 2\alpha, y, z - \beta, t - \alpha)\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{y} \quad (x - 2\alpha, y, z - \beta, t - \alpha)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$$

De aquí obtenemos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x - 5\alpha + t = 0 \\ z - \beta = 0. \end{cases}$$

de donde deducimos que $\alpha = (2x + t)/5$ y $\beta = z$.
Por lo tanto si $w = (x, y, z, t)$,

$$P_V^{\perp}\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}\right) = (2x + t)/5\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/5 & 0 & 0 & 2/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2/5 & 0 & 0 & 1/5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}.$$

Por otro lado,

$$P_{V^{\perp}}^{\perp}\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4/5 & 0 & 0 & 2/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2/5 & 0 & 0 & 1/5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/5 & 0 & 0 & -2/5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2/5 & 0 & 0 & 4/5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$$

2. Consideremos en el espacio $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ las variedades lineales

$$L_1 = \{x - 2z = 1, y + z = 1\} \qquad \text{y} \qquad L_2 = \{x + 2y = 2, y - z = 0\}.$$

a) Estudia la posición relativa entre L_1 y L_2 y calcula la distancia entre ellas.

b) Halla unas ecuaciones de una recta, si existe, que contiene al punto $P = (3, -1, 0)$ y corta a ambas variedades.

SOLUCIÓN: a) Escribimos las ecuaciones paramétricas de las dos rectas:

$$L_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle = R + \langle u \rangle; \quad L_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle = Q + \langle v \rangle.$$

Como $\vec{RQ} \notin \langle u, v \rangle$ se tiene que $L_1 \cap L_2 = \emptyset$, y como u y v son linealmente independientes, L_1 y L_2 no son paralelas. Por lo tanto las rectas se cruzan.
Para calcular la distancia entre L_1 y L_2 consideramos un vector que una un punto genérico de L_1 con un punto genérico de L_2:

$$(1) \qquad (1 + 2\alpha, 1 - \alpha, \alpha) - (2 - 2\beta, \beta, \beta) = (-1 + 2(\alpha + \beta), 1 - \alpha - \beta, \alpha - \beta),$$

y le imponemos la condición de que sea ortogonal a las direcciones de L_1, L_2 (esto nos permite encontrar los únicos puntos en L_1 y L_2, respectivamente, que determinan un vector perpendicular a u y a v):

$$(-1 + 2(\alpha + \beta), (1 - \alpha - \beta), (\alpha - \beta)) \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow 6\alpha + 4\beta - 3 = 0$$

$$(-1 + 2(\alpha + \beta), (1 - \alpha - \beta), (\alpha - \beta)) \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow -4\alpha - 6\beta + 3 = 0.$$

Resolviendo el sistema concluimos que $\alpha = \beta = 3/10$. Así, reemplazando en la expresión (1) obtenemos que

$$\mathrm{d}(L_1, L_2) = \|(1/5, 2/5, 0)\| = \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

b) Definimos $w_1 := \vec{PR} = (-2, 2, 0)$ y $w_2 := \vec{PQ} = (-1, 1, 0)$. Estos dos vectores son proporcionales. Ahora basta considerar la recta L en paramétricas:

$$P + \langle w_1, w_2 \rangle = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle.$$

Como $\vec{PR} = (-2, 2, 0) \in \langle u, w_2 \rangle$ tenemos que Ł $\cap L_1 \neq \emptyset$, y como $\vec{PQ} = (-1, 1, 0) \in \langle v, w_2 \rangle$ se tiene que $L \cap L_2 \neq \emptyset$. Las ecuaciones implícitas de L son $\{x + y = 2, z = 0\}$.

---

3. Una aplicación afín $f : \mathbb{A}^2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ produce el siguiente efecto:

$$f(1,1) = (4,2)\,, \qquad f(1,2) = (6,5)\,, \qquad f(2,1) = (5,2).$$

a) Calcula $f(4,-1)$.

b) Halla las ecuaciones de la aplicación afín f indicando la matriz de su parte lineal.

SOLUCIÓN: a) Se toma como sistema de referencia baricéntrico $\mathcal{B} = \{(1,1),(1,2),(2,1)\}$. Las coordenadas baricéntricas (α,β,γ) con respecto a $\mathcal{B}$ satisfacen

$$\alpha+\beta+\gamma = 1,$$

$$(4,-1) = \alpha(1,1)+\beta(1,2)+\gamma(2,1).$$

Estas igualdades dan el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma = 1 \\ \alpha+\beta+2\gamma = 4 \\ \alpha+2\beta+\gamma = -1. \end{cases}$$

La solución de este sistema es $\alpha = 0, \beta = -2, \gamma = 3$. Por tanto

$$f(4,-1) = f(0\cdot(1,1)+(-2)\cdot(1,2)+3\cdot(2,1)) = (-2)\cdot(6,5)+3\cdot(5,2) = (3,-4).$$

b) Hay que hallar las coordenadas baricéntricas de un punto cualquiera (x,y) respecto al sistema de referencia $\mathcal{B}$ del apartado anterior. Las coordenadas baricéntricas (α,β,γ) con respecto a $\mathcal{B}$ satisfacen

$$\alpha+\beta+\gamma = 1,$$

$$(x,y) = \alpha(1,1)+\beta(1,2)+\gamma(2,1).$$

Estas igualdades dan el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma = 1 \\ \alpha+\beta+2\gamma = x \\ \alpha+2\beta+\gamma = y. \end{cases}$$

La solución de este sistema en función de x e y es $\alpha = 3-x-y, \beta = y-1), \gamma = x-1$. Por tanto,

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (3-x-y)\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} + (y-1)\begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix} + (x-1)\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y+1 \\ 3y-1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

---

4. **a)** Halla las ecuaciones de la rotación R en $\mathbb{R}^3$ con eje $L = (2,0,0) + \mathcal{L}\{(0,0,1)\}$, orientado según el vector $\vec{u} = (0,0,1)$ y ángulo de giro $\dfrac{\pi}{3}$.

b) Sea $T_{\vec{v}}$ la traslación de vector $\vec{v} = (0,-2,0)$ en $\mathbb{R}^3$. Halla las ecuaciones de $R \circ T_{\vec{v}}$ en $\mathbb{R}^3$.

c) Identifica el movimiento $R \circ T_{\vec{v}}$ indicando sus elementos geométricos principales.

SOLUCIÓN: a) En el sistema de referencia canónico la matriz de la parte lineal de R es

$$A = \begin{pmatrix} \cos\pi/3 & -\operatorname{sen}\pi/3 & 0 \\ \operatorname{sen}\pi/3 & \cos\pi/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por tanto las ecuaciones de R son

$$R\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Los valores de a, b, c pueden calcularse usando que $P = (2,0,0)$ es un punto fijo. El resultado final es:

$$R\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

b)

$$\begin{aligned} R \circ T_{\vec{v}}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= R\begin{pmatrix} x \\ y-2 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y-2 \\ z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1+\sqrt{3} \\ -1-\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

c) La matriz de $R \circ T_{\vec{v}}$ no es autoadjunta y su determinante es 1. Por tanto $R \circ T_{\vec{v}}$ es una rotación con respecto a un eje o un movimiento helicoidal. Busquemos si tiene o no desplazamiento. El subespacio vectorial $V = \ker(A - I)$ es $V = \mathcal{L}\{(0,0,1)\}$. Por tanto,

$$d = P_V\begin{pmatrix} 1+\sqrt{3} \\ -1-\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}(0,0,1)\begin{pmatrix} 1+\sqrt{3} \\ -1-\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1+\sqrt{3} \\ -1-\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Como el desplazamiento es nulo, el movimiento es una rotación con respecto a un eje. El eje de rotación es el conjunto de puntos fijos:

$$\begin{pmatrix} 1+\sqrt{3} \\ -1-\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

La solución de este sistema es la recta

$$(x,y,z) = (2+\sqrt{3}, 1, 0) + t(0,0,1)\,, \quad t \in \mathbb{R}.$$

---

5. Determina, de manera razonada, qué tipo de objeto (elipse, hipérbola, parábola u otro) representa cada una de las siguientes ecuaciones:

a) $x^2 - xy + y^2 - x + y = 0$

b) $xy + y^2 - x + y = 0$

c) $x^2 - 4xy + 4y^2 + x = 0$

d) $x^2 - y^2 + x + y = 0$

e) $x^2 + 2xy + y^2 - 1 = 0$

SOLUCIÓN: Recordemos que si tenemos una curva de segundo grado de la forma:

$$a_{11}x^2 + a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_1 x + a_2 y + a = 0,$$

entonces se definen las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \frac{a_{12}}{2} \\ \frac{a_{12}}{2} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \overline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \frac{a_{12}}{2} & \frac{a_1}{2} \\ \frac{a_{12}}{2} & a_{22} & \frac{a_2}{2} \\ \frac{a_1}{2} & \frac{a_2}{2} & a \end{pmatrix}.$$

Así tenemos los invariantes:

$$s_1 = \text{Traza}(A)\,, \qquad \delta = |A|\,, \qquad \text{y} \qquad \Delta = |\overline{A}|.$$

Estos nos permiten la siguiente clasificación:

<table>
<tr><td colspan="2">$\delta > 0$</td><td colspan="2">$\delta < 0$</td><td colspan="2">$\delta = 0$</td></tr>
<tr><td>$\Delta \neq 0$</td><td>$\Delta = 0$</td><td>$\Delta \neq 0$</td><td>$\Delta = 0$</td><td>$\Delta \neq 0$</td><td>$\Delta = 0$</td></tr>
<tr><td colspan="2">¿signo(s_1) $\neq$ signo(Δ)?</td><td rowspan="3">Hipérbola</td><td rowspan="3">2 rectas secantes</td><td rowspan="3">Parábola</td><td rowspan="3">2 rectas paralelas,
1 recta,
o $\emptyset$</td></tr>
<tr><td>no</td><td>si</td></tr>
<tr><td>Elipse</td><td>$\emptyset$</td></tr>
</table>

Aplicándolo a nuestros casos:

Apartado	A	$\overline{A}$	δ	Δ	s_1	Tipo de objeto
a)	$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$	2	Elipse
b)	$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	1	Hipérbola
c)	$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -2 & \frac{1}{2} \\ -2 & 4 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$	0	-1	5	Parábola
d)	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$	-1	0	0	Dos rectas secantes
e)	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	0	0	2	Dos rectas paralelas

El caso e) se obtiene de $x^2 + 2xy + y^2 = (x+y)^2$. Por lo tanto tenemos:

$$(x+y)^2 = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \left\{ \begin{array}{l} x + y = 1 \\ x + y = -1 \end{array} \right.$$

---

6. Decide si existe un movimiento que transforma la cuádrica

$$\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}y^2-z^2+2x-2y+2z+3=0,$$

en

$$\frac{1}{2}x^2-y^2+\frac{1}{2}z^2+2xy-xz+2yz=0.$$

SOLUCIÓN: Sea $f_1(x,y,z)=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}y^2-z^2+2x-2y+2z+3$ el polinomio, en coordenadas canónicas, que define la primera cuádrica. Entonces tenemos

$$A_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0&0\\0&\frac{1}{2}&0\\0&0&-1\end{pmatrix},\quad \overline{A_1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0&0&1\\0&\frac{1}{2}&0&-1\\0&0&-1&1\\1&-1&1&3\end{pmatrix}\Longrightarrow\begin{cases}\delta=|A_1|=-\frac{1}{4},\\ \Delta=|\overline{A_1}|=0.\end{cases}$$

Por lo tanto la primera cuádrica es un cono.

Análogamente para la segunda cuádrica tenemos $f_2(x,y,z)=\frac{1}{2}x^2-y^2+\frac{1}{2}z^2+2xy-xz+2yz$ y

$$A_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&1&-\frac{1}{2}\\1&-1&1\\-\frac{1}{2}&1&\frac{1}{2}\end{pmatrix},\quad \overline{A_2}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&1&-\frac{1}{2}&0\\1&-1&1&0\\-\frac{1}{2}&1&\frac{1}{2}&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\Longrightarrow\begin{cases}\delta=|A_2|=-2,\\ \Delta=|\overline{A_2}|=0.\end{cases}$$

Por lo tanto la segunda cuádrica es un cono también.

Para decidir si se trata de la misma cuádrica, salvo por un movimiento, vamos a calcular unas formas canónicas de cada cuádrica. Para ello calculamos los autovalores de A_1 y A_2:

$$\begin{array}{lcl}p_{A_1}(x)=|A_1-xI_3|=-(x+1)\left(x-\frac{1}{2}\right)^2&\Longrightarrow&\text{autovalores }\left\{-1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\}\\ p_{A_2}(x)=|A_2-xI_3|=-(x+2)(x-1)^2&\Longrightarrow&\text{autovalores }\{-2,1,1\}\end{array}$$

Por lo tanto una forma canónica para cada cuádrica son:

$$-X^2+\frac{1}{2}Y^2+\frac{1}{2}Z^2=0\qquad\text{y}\qquad -2U^2+V^2+W^2=0.$$

Se observa que si multiplicamos la primera ecuación por 2 obtenemos la segunda. Por lo tanto ambas cuádricas tienen una misma forma canónica. Esto quiere decir que existe un movimiento que transforma la primera cuádrica en la segunda.