SOLUCIONES

1. (15 puntos) Estudia si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifica tu repuesta. (Recuerda que si la afirmación es verdadera hay que dar una demostración mientras que si la afirmación es falsa es suficiente con dar un contraejemplo):

Sea V un espacio euclideo de dimensión finita. Entonces:

a) $\|u\| \leq \max\{\|u+v\|, \|u-v\|\}$ para cualesquiera $u, v \in V$.

b) Existe un subespacio vectorial $F \subset V$ tal que $P_F^\perp - P_{F^\perp}^\perp$ es no invertible (donde $P_W^\perp$ denota la proyección ortogonal sobre el subespacio vectorial $W \subset V$).

c) $\operatorname{Ker}(f)$ es ortogonal a $\operatorname{Im}(f)$, para toda aplicación $f : V \longrightarrow V$ autoadjunta.

SOLUCIÓN:

a) VERDADERA. Por la desigualdad triangular $2\|u\| = \|u+u\| = \|(u+v)+(u-v)\| \leq \|u+v\|+\|u-v\|$. Como $\|u+v\| \leq \max\{\|u+v\|, \|u-v\|\}$ y $\|u-v\| \leq \max\{\|u+v\|, \|u-v\|\}$, se tiene que $2\|u\| \leq 2\max\{\|u+v\|, \|u-v\|\}$. De aquí se deduce el resultado dividiendo entre 2.

NOTA: Otra forma posible de solucionar este apartado es la siguiente. Como $\|u+v\|^2 = \|u\|^2+2\langle u,v\rangle+\|v^2\|$, si fuera $\langle u,v\rangle \geq 0$, se tendría $\|u+v\|^2 \geq \|u\|^2 + \|v^2\| \geq \|u\|^2$, y el resultado estaría probado. Si fuera $\langle u,v\rangle < 0$, se puede usar $\|u-v\|^2 = \|u\|^2 - 2\langle u,v\rangle + \|v^2\|$, para concluir que $\|u-v\|^2 > \|u\|^2 + \|v^2\| \geq \|u\|^2$, y el resultado estaría también probado.

b) FALSA. Sea $\{u_1, \ldots u_k\}$ una base ortonormal de F y $\{u_{k+1}, \ldots u_n\}$ una base ortonormal de $F^\perp$. En la base $\mathcal{B} = \{u_1, \ldots u_k, u_{k+1}, \ldots u_n\}$, la matriz de $P_F^\perp - P_{F^\perp}^\perp$ es

$$\begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & -I_{n-k} \end{pmatrix}.$$

Esta matriz tiene determinante $(-1)^{n-k} \neq 0$ y es por tanto invertible, al igual que en cualquier otra base.

c) VERDADERA. Sea $x \in \operatorname{Ker}(f)$ e $y \in \operatorname{Im}(f)$. Hay que probar que $\langle x,y\rangle = 0$. Como $y \in \operatorname{Im}(f)$, existe $u \in V$ tal que $f(u) = y$. Como f es autoadjunta,

$$\langle x,y\rangle = \langle x, f(u)\rangle = \langle f(x), u\rangle = \langle 0, u\rangle = 0,$$

porque $x \in \operatorname{Ker}(f)$.

2. (15 puntos) Sea W el espacio vectorial en $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores $u_1 = (0,1,0,1)$ y $u_2 = (1,0,1,-2)$ (cuyas coordenadas están dadas respecto a la base canónica).

a) Halla una base ortogonal de W con el producto escalar usual de $\mathbb{R}^4$.

b) Calcula la proyección ortogonal de $\mathbb{R}^4$ sobre W, indicando su matriz en la base canónica de $\mathbb{R}^4$.

SOLUCIÓN:

a) Se utiliza el procedimiento de Gram-Schmidt. Tomar $v_1 = u_1 = (0,1,0,1)$. Definir $v_2 = u_2 + \alpha v_1 = (1,0,1,-2) + \alpha(0,1,0,1)$, con la condición $\langle v_2, v_1\rangle = 0$. Se tiene,

$$0 = \langle v_2, v_1\rangle = \langle u_2 + \alpha v_1, v_1\rangle = \langle u_2, v_1\rangle + \alpha\langle v_1, v_2\rangle = -2 + 2\alpha.$$

Por tanto, $\alpha = 1$ y $v_2 = (1,0,1,-2) + (0,1,0,1) = (1,1,1,-1)$. Una base ortogonal de W es $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$.

b) Usando la base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$, hallada en el apartado a), que es ortogonal,

$$P(x) = \frac{\langle v_1, x\rangle}{\|v_1\|^2} v_1 + \frac{\langle v_2, x\rangle}{\|v_2\|^2} v_2 \,.$$

Escribir $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$. Entonces,

$$\begin{aligned} P(x) &= \frac{x_2 + x_4}{2}(0,1,0,1) + \frac{x_1 + x_2 + x_3 - x_4}{4}(1,1,1,-1) \\ &= \Big(\frac{x_1 + x_2 + x_3 - x_4}{4}, \frac{x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4}{4}, \frac{x_1 + x_2 + x_3 - x_4}{4}, \frac{-x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4}{4}\Big) \\ &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Nota: Se puede comprobar que $P(u_1) = u_1$ y que $P(u_2) = u_2$. Aunque esto no garantiza que la expresión hallada de P sea la correcta, si esto no sucede es una indicación de que la matriz de la proyección no es la correcta.

3. (20 puntos) Consideremos la afinidad $f_a : \mathbb{A}^3(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ dada por

$$f_a \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1/3 & -2/3 & 2/3 \\ -2/3 & -1/3 & -2/3 \\ 2/3 & -2/3 & -1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \qquad a \in \mathbb{R}.$$

a) Demuestra que es un movimiento y clasifícalo en función del parámetro a.

b) Indica los elementos geométricos principales para $a = 1$.

SOLUCIÓN:

a) Escribir $f_a(x) = b_a + Ax$. Se demuestra que es un movimiento comprobando que $AA^t = I$. Como A es simétrica y traza(A)=-1, se trata de una simetría con respecto a un eje (simetría axial) o una simetría axial con deslizamiento. También se puede decir que es un giro de 180º respecto a un eje o un movimiento helicoidal.

Será una simetría axial si tiene una recta de puntos fijos:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1/3 & -2/3 & 2/3 \\ -2/3 & -1/3 & -2/3 \\ 2/3 & -2/3 & -1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 4/3 & 2/3 & -2/3 \\ 2/3 & 4/3 & 2/3 \\ -2/3 & 2/3 & 4/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Hay que estudiar para qué valores de a el sistema anterior tiene una recta de soluciones y cuándo no tiene solución. Cuando se hacen los cálculos, por ejemplo con el método de Gauss, se obtiene que el sistema anterior tiene una recta de soluciones solo cuando $a = 2$ y es incompatible si $a \neq 2$.

Por tanto, si $a = 2$ el movimiento es una simetría axial y si $a \neq 2$ se trata de una simetría axial con deslizamiento (movimiento helicoidal).

b) Por el apartado **a)** sabemos que para $a = 1$ tenemos un movimiento helicoidal. Podemos comenzar calculando el deslizamiento con la fórmula $d = P_{\ker(A-I)}(b_1)$. Si llamamos $V = \ker(A - I)$ las ecuaciones de V son la solución del sistema $\begin{pmatrix} -4/3 & -2/3 & 2/3 \\ -2/3 & -4/3 & -2/3 \\ 2/3 & -2/3 & -4/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. La solución de este sistema es la recta vectorial $V = \{y + z = 0, x - z = 0\} = \mathcal{L}\{(1, -1, 1)\}$. Por tanto la expresión de la proyección de $\mathbb{R}^3$ sobre V en la base canónica es $P_V \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} (1, -1, 1) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Entonces, $d = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. El eje de simetría es la solución de $f_1(x) = x + d$, es decir,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1/3 & -2/3 & 2/3 \\ -2/3 & -1/3 & -2/3 \\ 2/3 & -2/3 & -1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

La solución de este sistema es la recta de ecuaciones $\{y + z = 0, x - z = 1\} = (1, 0, 0) + \mathcal{L}\{(1, -1, 1)\}$.

Nota: También se puede calcular la variedad característica usando $L_f = \{x \in \mathbb{R}^3 : (A-I)^2 x + (A-I)b_1 = 0\}$ y luego hallar el deslizamiento d como el vector que une b con $f_1(b)$, tomando cualquier punto $b \in L_f$.

---

4. Dadas las siguientes variedades lineales de $\mathbb{A}^4(\mathbb{R})$:

$$L_1 = (1,1,0,0) + \mathcal{L}(\{(1,-1,-1,0),(0,1,-1,0),(0,1,1,1)\}) \qquad y \qquad L_2 : \begin{cases} 2x + z = 3, \\ 2t - y = 1. \end{cases}$$

a) Calcula las ecuaciones implícitas de L_1 (con respecto al sistema de referencia canónico).

b) Determina la posición relativa entre L_1 y L_2.

c) Calcula la distancia entre L_1 y L_2.

<u>SOLUCIÓN</u>:

a) En primer lugar escribamos $L_1 = A_1 + \mathcal{L}(\{u_1, u_2, u_3\})$, donde

$$A_1 = (1,1,0,0), \qquad u_1 = (1,-1,-1,0), \quad u_2 = (0,1,-1,0), \quad u_3 = (0,1,1,1)\,.$$

Se tiene que $\dim(L_1) = 3$ ya que u_1, u_2, u_3 son linealmente independientes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \text{rango} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3\,.$$

Ahora, sea $P = (x,y,z,t) \in L_1$, entonces $\overrightarrow{A_1P} \in \overrightarrow{L_1}$. Es decir, los vectores $\overrightarrow{A_1P} = (x-1, y-1, z, t), u_1, u_2, u_3$ son linealmente dependientes. Por lo tanto:

$$\text{rango} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & x-1 \\ -1 & 1 & 1 & y-1 \\ -1 & -1 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 & t \end{pmatrix} = 3 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & x-1 \\ -1 & 1 & 1 & y-1 \\ -1 & -1 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 & t \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & x-1 \\ -1 & 1 & 1 & y-1 \\ -1 & -1 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 & t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & y-1 \\ -1 & 1 & z \\ 0 & 1 & t \end{vmatrix} - (x-1) \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (2t-y-z+1) - 2(x-1) = 2t - 2x - y - z + 3.$$

Es decir, la ecuaciones implícita de L_1 es:

$$L_1 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{A}^4(\mathbb{R}) \,:\, 2x + y + z - 2t = 3\}.$$

b) Calculamos una base de $\overrightarrow{L_2}$:

$$\overrightarrow{L_2} = \begin{cases} 2x + z = 0, \\ 2t - y = 0. \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \overrightarrow{L_2} = \mathcal{L}(\{v_1, v_2\}) \quad \text{donde} \quad \begin{cases} v_1 = (1,0,-2,0), \\ v_2 = (0,2,0,1). \end{cases}$$

Por otro lado, tenemos $\overrightarrow{L_1} = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{A}^4(\mathbb{R}) \,:\, 2x + y + z - 2t = 0\}$. Se tiene que $v_1, v_2 \in \overrightarrow{L_1}$, ya que satisfacen su ecuación implícita. Por lo tanto, $\overrightarrow{L_2} \subset \overrightarrow{L_1}$. Ahora $A_1 \notin L_2$, por lo tanto L_1 y L_2 son paralelas y L_2 no esta incluida en L_1 (el caso inverso tampoco ya que $\dim(L_1) = 3 > 2 = \dim(L_2)$).

c) Hemos visto que $\overrightarrow{L_2} \subset \overrightarrow{L_1}$ por lo tanto $d(L_1, L_2) = d(P_2, L_1)$ para cualquier punto $P_2 \in L_2$. Por otro lado, recordemos que si H es un hiperplano en $\mathbb{A}^4(\mathbb{R})$ de ecuación $ax + by + cz + dt + e = 0$ y si $P = (x,y,z,t) \in \mathbb{A}^4(\mathbb{R})$ entonces:

$$d = (P, H) = \frac{|ax + by + cz + dt + e|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}}.$$

Por lo tanto, en nuestro caso como L_1 es un hiperplano, si tomamos $P_2 = (1,1,1,1) \in L_2$ se tiene:

$$d(L_1, L_2) = d(P_2, L_1) = \frac{|2\cdot 1 + 1\cdot 1 + 1\cdot 1 - 2\cdot 1 - 3|}{\sqrt{2^2+1^2+1^2+2^2}} = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

Si no recordamos la fórmula anterior, se tiene:

$$d(P_2, L_1) = d(P_2, \mathrm{Pr}^{\perp}_{L_1}(P_2)) = \|\mathrm{Pr}^{\perp}_{\overrightarrow{L_1}^{\perp}}(\overrightarrow{AP_2})\|, \qquad \text{para todo } A \in L_1.$$

Se tiene que $\overrightarrow{L_1}^{\perp} = \mathcal{L}(\{(2,1,1,-2)\})$. Por lo tanto si tomamos $A = A_1$, se tiene $\overrightarrow{AP_2} = (0,0,1,1)$ y:

$$\mathrm{Pr}^{\perp}_{\overrightarrow{L_1}^{\perp}}(\overrightarrow{AP_2}) = \frac{(0,0,1,1)\cdot(2,1,1,-2)}{\|(2,1,1,-2)\|^2}(2,1,1,-2) = \frac{1}{10}(2,1,1,-2)$$

Así concluimos:

$$d(L_1, L_2) = \left\|\frac{1}{10}(2,1,1,-2)\right\| = \frac{\sqrt{10}}{10} = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

<u>Otro forma:</u> Utilizando la fórmula general de la distancia entre dos variedades lineales:

$$d(L_1, L_2) = \|\mathrm{Pr}^{\perp}_{(\overrightarrow{L_1}+\overrightarrow{L_2})^{\perp}}(\overrightarrow{P_1P_2})\|, \qquad \text{para todo } P_1 \in L_1,\ P_2 \in L_2.$$

Tomando $P_1 = (1,1,0,0) \in L_1$ y $P_2 = (1,1,1,1) \in L_2$, y observado que $\overrightarrow{L_1} + \overrightarrow{L_2} = \overrightarrow{L_1}$, llegamos a la misma fórmula que antes.

5. Considera la cónica definida por la ecuación:

$$4x^2 + 4xy + 7y^2 + 12y \; = \; 0\,.$$

a) Determina el tipo de cónica.

b) Describe, en las coordenadas originales, los elementos geométricos de la cónica:

- **Parábola: Foco, vértice, eje principal y directriz.**
- **Elipse: Focos, centro y ejes principales.**
- **Hipérbola: Focos, centro, ejes principales y asíntotas.**

SOLUCIÓN:

a) Sea $f(x,y) = 4x^2+4xy+7y^2+12y$ el polinomio, en coordenadas canónicas, que define la cónica. Entonces tenemos

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}, \quad \overline{A} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 7 & 6 \\ 0 & 6 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} \delta = |A| = 24, \\ \Delta = |\overline{A}| = -144. \end{cases}$$

Como $\delta > 0$ tenemos que la cónica es de tipo elíptico, en particular que los autovalores de A, λ_1, λ_2, son no nulos y del mismo signo. Ahora, como $\Delta < 0$ obtenemos que la cónica es una elipse o el vacío. Será una elipse si $\lambda_1, \lambda_2 > 0$. Para ello calculamos el polinomio característico de A: $p_A(x) = x^2 - 11x + 24 = (x-3)(x-8)$. Por tanto $\lambda_1 = 3$ y $\lambda_2 = 8$. Así que obtenemos que la cónica es una elipse que tiene la siguiente forma canónica

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 - \frac{\Delta}{\delta} = 0 \Longrightarrow 3X^2 + 8Y^2 = 6 \Longrightarrow \frac{X^2}{2} + \frac{Y^2}{3/4} = 1.$$

De la ecuación canónica tenemos que los semiejes son $a = \sqrt{2}$ y $b = \sqrt{3}/2$, luego la distancia del centro a los focos es $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{5}/2$.

b) Calculamos los autovectores asociados a los autovalores:

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1 = 3 \Longrightarrow A - 3I = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \Longrightarrow u_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2,-1) \\[2ex] \lambda_2 = 8 \Longrightarrow A - 8I = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow u_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,2) \end{array}\right\} \Longrightarrow P = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}.$$

Sustituimos (x,y) en la ecuación de la cónica y obtenemos:

$$3x_1^2 + 8y_1^2 - \frac{12}{\sqrt{5}}x_1 + \frac{24}{\sqrt{5}}y_1 = 0$$

Completando cuadrados obtenemos:

$$3\left(x_1 - \frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 + 8\left(y_1 + \frac{3}{2\sqrt{5}}\right)^2 - 6 = 0 \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_2 = x_1 - \frac{2}{\sqrt{5}} \\ y_2 = y_1 + \frac{3}{2\sqrt{5}} \end{array}\right\} \Longrightarrow 3x_2^2 + 8y_2^2 = 6.$$

Por lo tanto el cambio de coordenadas es de la forma:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x_2 + \frac{2}{\sqrt{5}} \\ y_2 - \frac{3}{2\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Ahora calculemos los elementos geométricos:

	(x_2, y_2)	(x,y)
Centro	$(0,0)$	$(1/2,-1)$
Focos	$(\pm\sqrt{5}/2, 0)$	$(3/2,-3/2), (-1/2,-1/2)$
Eje principal	$y_2 = 0$	$2x + 4y + 3 = 0$
Eje secundario	$x_2 = 0$	$y - 2x + 2 = 0$

Otra forma (sin calcular el cambio de variable (x_2, y_2)): La ecuación del centro $p_0 = (x_0, y_0)$ es

$$\nabla f(x_0, y_0) = (0,0) \Longleftrightarrow 2 \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Luego el centro es $p_0 = (1/2, -1)$. Por lo tanto

Centro	p_0	$(1/2, -1)$
Focos	$p_0 \pm cu_1$	$(3/2, -3/2), (-1/2, -1/2)$
Eje principal	$p_0 + \mathcal{L}(u_1)$	$2x + 4y + 3 = 0$
Eje secundario	$p_0 + \mathcal{L}(u_2)$	$y - 2x + 2 = 0$

6. Sea $a \in \mathbb{R}$ y consideramos la cuádrica definida por

$$\mathcal{Q}_a \ : \ x^2 + 6xy + (3+a)y^2 + az^2 + 4z + 3 = 0.$$

Determina los valores de $a \in \mathbb{R}$ tales que

a) $\mathcal{Q}_a$ es un elipsoide.

b) $\mathcal{Q}_a$ es un hiperboloide de una hoja.

c) $\mathcal{Q}_a$ es un hiperboloide de dos hojas.

d) $\mathcal{Q}_a$ es un paraboloide elíptico.

e) $\mathcal{Q}_a$ es un paraboloide hiperbólico.

SOLUCIÓN:

Sea $f_a(x,y,z) = x^2 + 6xy + (3+a)y^2 + az^2 + 4z + 3$ el polinomio, en coordenadas canónicas, que define la cuádrica. Entonces tenemos

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & a+3 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \quad \overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & a+3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} \delta = |A| = a \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & a+3 \end{vmatrix} = a(a-6), \\ \Delta = |\overline{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & a+3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = (a-6)(3a-4). \end{cases}$$

La determinación del tipo de cuádrica dependerá de los signos de los autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ de A. O lo que es lo mismo, de la signatura de A, es decir de la signatura de la forma cuadrática $x^2+6xy+(3+a)y^2+az^2$. Es fácil ver que completando cuadrados se tiene

$$x^2 + 6xy + (3+a)y^2 + az^2 = (x+3y)^2 + (a-6)y^2 + az^2.$$

Por lo tanto:

	$a<0$	$a=0$	$0<a<6$	$a=6$	$a>6$
$\mathrm{sig}(A)$	$(1,2)$	$(1,1)$	$(2,1)$	$(2,0)$	$(3,0)$

Otra forma de ver la signatura de A es mediante sus autovalores:

$$\begin{aligned} p_A(x) \ &= |A - xI_3| = -x^3 + 2(2+a)x^2 - (a+6)(a-1)x + a(a-6) = \\ &-(x-a)(x^2 - (4+a)x + a - 6) = \\ &-(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)(x-\lambda_3) \end{aligned}$$

donde

$$\lambda_1 = a, \qquad \lambda_2 = \frac{1}{2}\left(a+4+\sqrt{a^2+4a+40}\right), \qquad \lambda_3 = \frac{1}{2}\left(a+4-\sqrt{a^2+4a+40}\right)$$

Se observa que $\lambda_2 > 0$ para todo $a \in \mathbb{R}$ y $\lambda_3 = 0$ si $a = 6$. En particular obtenemos:

	$a<0$	$a=0$	$0<a<6$	$a=6$	$a>6$
$\mathrm{signo}(\lambda_1)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$\mathrm{signo}(\lambda_2)$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$\mathrm{signo}(\lambda_3)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$\mathrm{sig}(A)$	$(1,2)$	$(1,1)$	$(2,1)$	$(2,0)$	$(3,0)$

Obsérvese que solo se piden los casos en los que $\Delta \neq 0$. Para $\delta \neq 0$ (apartados a), b) y c)) y $\delta = 0$ (apartados d), e)). Aunque lo resolveremos en general:

• $\delta \neq 0$ (i.e. $a \neq 0, 6$). Entonces una forma canónica de $\mathcal{Q}_a$ será:

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \lambda_3 Z^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0.$$

Por lo tanto si asumimos que $\Delta \neq 0$ (i.e. $a \neq 4/3$). El tipo de $\mathcal{Q}_a$ vendrá determinado por la relación entre el signo de $\frac{\Delta}{\delta} = \frac{3a-4}{a}$ y sig(A):

	$a < 0$	$0 < a < 4/3$	$4/3 < a < 6$	$a > 6$
sig(A)	$(1,2)$	$(2,1)$	$(2,1)$	$(3,0)$
signo$(\frac{\Delta}{\delta})$	$\frac{+}{+} = +$	$\frac{+}{-} = -$	$\frac{-}{-} = +$	$\frac{+}{+} = +$
$\mathcal{Q}_a$	Hiperboloide de 1 hoja	Hiperboloide de 1 hoja	Hiperboloide de 2 hoja	$\emptyset$

Ahora veamos el caso $a = 4/3$. Como $\Delta = 0$ y sig$(A) = (2,1)$ obtenemos que $\mathcal{Q}_a$ es un cono.

- $\delta = 0$ (i.e. $a = 0, 6$): En este caso obtendremos:
  - Si $a = 0$ se tendrá $\Delta \neq 0$ y sig$(A) = (1,1)$ por lo tanto $\mathcal{Q}_0$ es un paraboloide hiperbólico.
  - Si $a = 6$ se tendrá $\Delta = 0$ y sig$(A) = (2,0)$. Así $f_6(x,y,z) = (x+3y)^2 + 6(z+1/3)^2 + 7/3 > 0$, para todo $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Es decir, $\mathcal{Q}_6$ es vacío.

Conclusión:

	$a < 0$	$a = 0$	$0 < a < 4/3$	$a = 4/3$	$4/3 < a < 6$	$a \geq 6$
$\mathcal{Q}_a$	Hiperboloide de 1 hoja	Paraboloide hiperbólico	Hiperboloide de 1 hoja	Cono	Hiperboloide de 2 hojas	$\emptyset$