Hoja 5: Integración

1.- Calcular las siguientes integrales indefinidas mediante el cambio de variable adecuado:

$$a) \int \frac{1}{x}\, e^{1+\ln x}\, dx \qquad b) \int x\, e^{x^2}\, dx \qquad c) \int \frac{e^x}{2e^x-1}\, dx \qquad d) \int \frac{2}{5-3x}\, dx$$

$$e) \int x^2\sqrt{1+x}\, dx \qquad f) \int \frac{x}{1+x^4}\, dx \qquad g) \int \frac{5}{(4x+3)^3}\, dx$$

2.- Dada la integral $\displaystyle\int \frac{\cos t \operatorname{sen}^2 t}{1+\operatorname{sen}^3 t} dt$, se pide:

a) Hacer el cambio de variable $t = s^2$ y escribir la integral indefinida resultante.

b) Hacer el cambio de variable $\operatorname{sen} t = z$ y escribir la integral indefinida resultante.

3.- Calcular las siguientes integrales con la técnica de integración por partes:

$$a) \int x\cos x\, dx \qquad b) \int x\, e^{-x}\, dx \qquad c) \int \ln x\, dx \qquad d) \int x^2 \sin x\, dx \qquad e) \int x\ln x\, dx$$

4.- Utilizar el método de la descomposición en fracciones simples (factores lineales) para calcular:

$$a) \int \frac{1}{x^2-5x+6}\, dx \qquad b) \int \frac{x^4+3}{x^2-4x+3}\, dx \qquad c) \int \frac{3x+1}{x^3-x}\, dx$$

5.- Utilizar el método de la descomposición en fracciones simples (factores lineales y cuadráticos) para evaluar

$$a) \int \frac{2x}{x^3-3x-2}\, dx \qquad b) \int \frac{x^3}{x^3-3x+2}\, dx$$

6.- El teorema fundamental del cálculo integral establece que, si f es una función continua en $[a,b]$, la función $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ es derivable en $[a,b]$ y su derivada es $F'(x) = f(x)$. Usando dicho teorema y la regla de la cadena, calcular la derivada de la siguiente función: $F(x) = \int_0^{x^2} (\operatorname{sen} t^2)\, \log(1+t^2)\, dt\,.$

7.- Encontrar una función f definida y continua en $[0,\infty)$ tal que $\int_0^{x^2} (1+t)\, f(t)\, dt = 6\, x^4$.

8.- Existen funciones (algunas de apariencia sencilla) que no tienen primitiva elemental: el resultado de integrarlas no puede expresarse como combinación (sumas, productos, composiciones) de funciones racionales, exponenciales, logaritmos, funciones trigonométricas y sus inversas y funciones hiperbólicas y sus inversas. Utilizar la regla del trapecio (con cuatro subintervalos) para calcular:

$$a) \int_0^2 e^{-x^2} dx \qquad b) \int_1^5 \sqrt{x^3-1}\, dx$$

9.- Aproximar el valor de $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{1+x^3}}\, dx$:

a) Usando la regla del trapecio con 4 subintervalos.

b) Usando la regla de Simpson con 4 subintervalos.

10.- Sabemos que $\int_0^1 \frac{4}{1+x^2}\, dx = \pi$. Usar la regla de Simpson con cuatro subintervalos para aproximar el valor de π.

11.- Escribe la integral definida que resulta de hacer el cambio de variable indicado en la integral definida dada:

a) Cambio de variable $x = \sqrt{u}$ en la integral $\displaystyle\int_1^2 x^3 e^{x^2}\,dx$.

b) Cambio de variable $u = \ln x$ en la integral $\displaystyle\int_1^e x^3 (\ln x)^2\,dx$.

c) Cambio de variable $x = \operatorname{sen} t$ en la integral $\displaystyle\int_{1/2}^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$.

12.- Calcular el área delimitada por las curvas siguientes:
(i) $y = \operatorname{sen}\, x$, $x = \frac{\pi}{3}$, $x = \frac{\pi}{2}$ y el eje x.
(ii) $y = 5 - x^2$ e $y = 3 - x$

13.- Escribe la integral o integrales definidas que permiten calcular el área de las regiones indicadas:
a) La región comprendida entre las gráficas de las funciones $f(x) = x + 1$, $g(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ y las rectas $y = -1$ y $x = 3$.
b) La región comprendida entre las circunferencias $x^2 + y^2 = 1$ y $x^2 + y^2 = 2x$.
c) La región comprendida entre la gráfica de la función $f(x) = \frac{x^2-4}{x^2+4}$ y su asíntota horizontal.

14.- Calcular el área comprendida entre las curvas $y = x\,e^{-x}$, $y = x^2\,e^{-x}$ para valores de $x \geq 1$.