Hoja 1: Álgebra lineal y dinámica de poblaciones

1. Realizar las siguientes multiplicaciones de matrices:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 5 & 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 5 \\ 0 & -1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 7 & -3 \\ 1 & -1 & -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

2. Sea A la matriz
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 4 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$
Realiza la siguientes multiplicaciones de matrices
$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}A; \qquad A\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}A; \qquad A\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Calcula $a, b, c, d$ tal que $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -4 \\ 4 & 5 & 4 \end{pmatrix}$.

4. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ ¿Podrás hallar una matriz $X$ tal que $A \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$?

5. Para la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, calcula las sucesivas potencias de $A$.

6. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, calcula $A^n$ para cualquier entero positivo $n$.
Sugerencia: Escribe $A = I_2 + B$ con $B$ una matriz que debes determinar.

7. Hallar la matriz inversa de las matrices:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

8. Calcula el determinante de las matrices
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

9. Usando el método de Gauss, halla la inversa de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

10. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales usando el método de Gauss:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 + x_3 - x_4 = 5 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = -5 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 - x_3 = 1 \end{cases}$$

.

11. Las hembras de una población se pueden clasificar en dos grupos de edad (hembras jóvenes y hembras adultas). La matriz de Leslie que describe la evolución de esta población es la siguiente:

$$L = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0.11 & 0 \end{pmatrix}$$

   (a) ¿Cuál es la proporción de hembras jóvenes que consiguen llegar al estado adulto? ¿Cuál es la natalidad en cada uno de los grupos de edad?
   (b) Si inicialmente hay 100 hembras de cada clase, ¿cuántas habrá en el siguiente período de tiempo?
   (c) A largo plazo, ¿cuál será la tasa de variación de cada uno de los grupos? ¿Se extinguirá la población?
   (d) A largo plazo, ¿cuál será la proporción de hembras jóvenes y adultas?

12. En cierta especie animal, las hembras se clasifican en *juveniles* (hasta 1 año de edad) y *adultas* (de 1 a 2 años de edad).

   Solamente el 40% de las hembras jóvenes sobreviven cada año y pasan a adultas. Tienen una descendencia de 1,1 hembras al año.

   Las hembras adultas no sobreviven al año siguiente, y tienen una descendencia media de 1,6 hembras cada año.

   (a) Construir la matriz de Leslie correspondiente a este modelo de evolución.

   (b) Calcular la tasa de crecimiento o decrecimiento a largo plazo.

   (c) Calcular la proporción aproximada de hembras jóvenes que formarán parte de la población a largo plazo.

13. Se lleva a cabo un estudio sobre una población de ballenas azules. Las hembras son clasificadas en cuatro grupos de edad, y sobre cada grupo se obtiene la siguiente información en términos de fertilidad (número medio de crías hembras en cada período) y en terminos de mortalidad:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| GRUPO DE EDAD: | 0 a 3 | 4 a 7 | 8 a 11 | 12 a 15 |
| NO. MEDIO DE CRÍAS: | 0 | 0'63 | 1'00 | 0'90 |
| MORTALIDAD: | 43% | 43% | 43% | 100% |

   Formular un modelo matricial para la evolución de esta población. Si en un determinado momento, la población está formada por 20, 30, 40 y 20 ballenas hembra de cada tipo de edad, ¿cuál será la composición de la población (aproximadamente) al cabo de dos períodos de tiempo?

14. En una granja de cría de cerdos, los animales son clasificados según sus edades de la siguiente forma:

    - Cochinillos: De 0 a 1 año.
    - Lechones: De 1 a 2 años.
    - Jóvenes: De 2 a 3 años.
    - Adultos: De 3 a 4 años.

    El procedimiento de gestión de las hembras de la granja es el siguiente:

    - Se sacrifica al 60% de las que van naciendo para su consumo como cochinillos.
    - Se sacrifica para su consumo a todas las hembras cuando llegan a los 4 años. No se sacrifica a ninguna de las demás, y se supone que ningún animal muere por otras causas.
    - Se dedica a todas las hembras jóvenes y adultas a la cría. Se sabe que, en media, cada hembra joven tendrá 0,5 camadas de 5 cochinillos, cada hembra adulta tendrá 0,8 camadas de 5 cochinillos, y que el 50% de todos los nuevos nacidos serán hembras.

    Formular el modelo apropiado para describir la evolución de la población de las hembras.

15. La población de cierta especie de animales en un bosque está dividida en dos grupos de edad (jóvenes y adultos). La correspondiente matriz de Leslie es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

    **a)** Interpreta el significado de cada uno de los elementos de la matriz anterior.

    **b)** Calcula el autovalor dominante de $A$ y un autovector asociado.

    **c)** Sea $X(k)$ el número de animales de cada grupo en la etapa $k$. Si en la etapa 0 hay únicamente 10 animales jóvenes en el bosque, calcula $X(1), X(2), X(3)$ y $X(4)$. A partir de $X(4)$ calcula la proporción exacta de individuos de cada grupo respecto al total de la población en la etapa 4.

    **d)** Calcula la misma proporción de forma aproximada mediante el autovector asociado al autovalor dominante, y compara el resultado obtenido en este apartado con el del apartado anterior.

16. Estudiamos una población de aves. Clasificamos las hembras en tres grupos de edad: jóvenes (de 0 a 1 año), adultas fértiles (de 1 a 2 años), y adultas no fértiles (de 2 a 3 años). Sabemos que un 12% de las hembras jóvenes y un 54% de las adultas fértiles sobreviven cada año. Ninguna de las adultas no fértiles sobrevive. Cada hembra joven produce (en promedio) una hembra al año y cada adulta fértil produce dos.

    **a)** Describir la evolución de la población en forma matricial.

    **b)** Transcurridos unos años, determina en qué tanto por ciento crecerá o decrecerá anualmente la población de hembras.

    **c)** Determina cuál debería ser el tanto por ciento de supervivencia de las hembras jóvenes para que la población se mantuviera estable.

17. Una población de aves se encuentra repartida entre dos humedales $A$ y $B$. Se sabe que cada día un 70% de aves del humedal $A$ se traslada a $B$ mientras que un 50% de aves de B lo hace a A.

   **a)** Dibuja el diagrama de estados y escríbelo después en forma matricial.

   **b)** Si inicialmente había el mismo número de aves en cada humedal, ¿que porcentaje de éstas están en cada uno de ellos después de dos días?

   **c)** Si inicialmente había 120 aves en cada humedal ¿qué evolución seguirá el sistema a largo plazo?

18. Supongamos que

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0.6 & 0.8 \end{pmatrix}$$

   es la matriz de transición de una población de cotorras, dividida para su estudio en jóvenes y adultas.

   **a)** Demuestra que, a la larga, la población crecerá por un factor aproximado de 1.27.

   **b)** Los granjeros y otras personas del área no quieren que la población crezca. Pueden controlarla permitiendo la caza de cotorras adultas. Si $h$ es la proporción de adultas cazadas en cada período, ¿cuál será ahora la matriz de transición? (Observación: La proporción $h$ se considera sobre el total de adultas al final del periodo, una vez que ya se ha tenido en cuenta la natalidad y la mortalidad debida a otras causas distintas a la caza)

   **c)** Prueba que $h = 0.6$ es una caza demasiado intensiva, es decir, la población de cotorras se extinguiría.

   **d)** Es posible seleccionar $h$ de manera que la población no crezca ni desaparezca. ¿Cuál sería ese valor de $h$?

   **e)** Responder a las preguntas anteriores cambiando la matriz $A$ por

$$A' = \begin{pmatrix} 0.8 & 1 \\ 0.6 & 0 \end{pmatrix}$$

19. En dos reservas en las que está prohibida la caza, las autoridades encargan un estudio de la población de hembras de jabalí. En el estudio, se realiza durante años un censo en ambas reservas, contando la población de ejemplares menores de un año (jóvenes, sin capacidad de reproducción), y también la población de ejemplares mayores de un año (adultos, que ya pueden reproducirse), concluyendo que:

   - En la primera reserva cada ejemplar adulto da lugar, en promedio, a 1,5 nuevos ejemplares (jóvenes) cada año. Además, se estima que sobrevivirán un año más el 10 % de los ejemplares que están censados como jóvenes, y el 80% de los adultos.
   - En la segunda reserva cada ejemplar adulto da lugar, en promedio, a 1,2 nuevos ejemplares (jóvenes) cada año. Además se estima que sobrevivirán un año más el 50% de los ejemplares que están censados como jóvenes, y el 70% de los adultos.

     **a)** ¿Cuál de las dos reservas debería ser la elegida para comenzar a permitir la caza de algunos ejemplares sin riesgo de extinguir la población?

     **b)** En la reserva correcta, se decide permitir una cacería de ejemplares adultos justo antes de cada nuevo censo. Así, el porcentaje de supervivencia de adultos, contando tanto las condiciones naturales como el efecto de la caza, pasará a ser menor de lo que era originalmente, y los otros datos permanecerán igual. Si se quiere que a largo plazo la población permanezca estable, ¿cuál debe ser el nuevo porcentaje de supervivencia de adultos?

     **c)** Tras realizarse durante muchos años la caza en la reserva determinada en el apartado a), al ritmo adecuado para que se den las condiciones de estabilidad del apartado b), ¿qué porcentaje aproximado del total de la población será joven?

20. La evolución de una población viene descrita por la matriz de transición:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1.4 & 0.5 \\ 0.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0.75 & 0.2 \end{pmatrix}$$

Tras introducir los datos en un programa de ordenador, hemos obtenido la salida siguiente:

| n | $X_n$ | $Y_n$ | $Z_n$ | $S_n = X_n + Y_n + Z_n$ | $X_n/X_{n-1}$ | $X_n/S_n$ | $Y_n/S_n$ | $Z_n/S_n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 11 | 22 | 5 | 38 | | 0,289 | 0,579 | 0,132 |
| 1 | 33,3 | 6,6 | 17,5 | 57,4 | 3,027 | 0,580 | 0,115 | 0,305 |
| 2 | 17,99 | 19,98 | 8,45 | 46,42 | 0,540 | 0,388 | 0,430 | 0,182 |
| 3 | 32,197 | 10,794 | 16,675 | 59,666 | 1,789 | 0,539 | 0,180 | 0,279 |
| 4 | 23,449 | 19,318 | 11,431 | 54,198 | 0,728 | 0,433 | 0,356 | 0,211 |
| 5 | 32,761 | 14,069 | 16,775 | 63,605 | 1,397 | 0,515 | 0,221 | 0,264 |
| 6 | 28,085 | 19,656 | 13,907 | 61,648 | 0,857 | 0,456 | 0,319 | 0,226 |

(Los datos correspondientes a las celdas que ocuparían estas posiciones intermedias no son relevantes para la resolución del problema, por lo que los suprimimos para ahorrar espacio.)

| n | $X_n$ | $Y_n$ | $Z_n$ | $S_n = X_n + Y_n + Z_n$ | $X_n/X_{n-1}$ | $X_n/S_n$ | $Y_n/S_n$ | $Z_n/S_n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 25 | 79,128 | 45,143 | 39,821 | 164,093 | 1,052 | 0,482 | 0,275 | 0,243 |
| 26 | 83,111 | 47,477 | 41,822 | 172,410 | 1,050 | 0,482 | 0,275 | 0,243 |
| 27 | 87,379 | 49,867 | 43,972 | 181,218 | 1,051 | 0,482 | 0,275 | 0,243 |
| 28 | 91,800 | 52,427 | 46,195 | 190,421 | 1,051 | 0,482 | 0,275 | 0,243 |
| 29 | 96,495 | 55,080 | 48,559 | 200,134 | 1,051 | 0,482 | 0,275 | 0,243 |
| 30 | 101,391 | 57,897 | 51,022 | 210,310 | **1,051** | **0,482** | **0,275** | **0,243** |

a) Explicar el significado biológico de los nueve números que aparecen en la matriz de transición.

b) Calcular los números que deberían aparecer en las **tres celdas** marcadas con interrogaciones en la fila 3.

c) Explicar el significado biológico de los **cuatro números marcados en negrita en la última fila** (y que se repiten en las tres filas anteriores)

21. La oficina de antiguos alumnos de la Universidad observa que, de los alumnos que pagan la cuota anual un año, el 80 % también la paga el año siguiente mientras que, de los que no la han pagado un año, un 30 % sí la pagará al siguiente. Estudiar el comportamiento a largo plazo del pago de cuotas.

22. Una balsa de lodo, que permanece con volumen constante, contiene productos tóxicos. La balsa desagua por filtración través de un curso de agua cercano en el que observamos, tras la citada filtración, una concentración de tóxicos igual al 10% de la que hay en la balsa. Una depuradora opera en la balsa y trata cada hora el $0'1\%$ del contenido de la balsa con una efectividad del 85% sobre el lodo que trata. Aguas abajo otra depuradora trata todo el caudal de la corriente con una efectividad del 40%. Formula un modelo que estudie cuento tardará en reducirse la concentración de tóxicos en un factor 10 a la salida de la segunda depuradora.

23. En cierto río hay tres pequeñas lagunas del mismo tamaño. Una fábrica vierte cada semana en la primera de ellas una cantidad $c$ de contaminante altamente soluble en el agua. Si cada laguna desagua semanalmente un 10% de su volumen hacia la siguiente, aguas abajo, encontrar cual será la situación de equilibrio.