Geometría Euclídea II:
Isometrías o Movimientos.

1. Encuentra la expresión analítica de las siguientes isometrías:

a) La simetría deslizante de eje paralelo a la recta $2x + y = 3$ y que transforma $(2, 1)$ en $(1, 0)$.

b) El giro de ángulo $\pi/3$ que lleva $(2, 1)$ en $(1, 0)$.

2. Determina las ecuaciones (respecto del sistema de referencia canónico de $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$) de la simetría axial con respecto a la recta $y + x = 1$.

3. Considera la familia de afinidades de $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ dadas por las ecuaciones (con respecto a un sistema de referencia canónico):

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cy + a \\ x + b \end{pmatrix}.$$

Determina los valores de los parámetros a, b y c para los que estas afinidades son movimientos y calcula sus elementos geométricos.

4. Estudia las siguientes isometrías del plano:

$$\begin{cases} x' = -2 + \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y \\ y' = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y \end{cases}, \quad \begin{cases} x' = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y \\ y' = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y. \end{cases}$$

5. Sea $\mathcal{R} = \{P; \vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ un sistema de referencia ortonormal (con respecto al producto escalar usual) en el plano afín $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$. Consideremos los puntos de coordenadas $A = (1, 0)_{\mathcal{R}}$, $B = (0, -1)_{\mathcal{R}}$, $C = (2, 2)_{\mathcal{R}}$ y $D = (-2, -2)_{\mathcal{R}}$.

a) ¿Existe alguna traslación T en $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ tal que $T(A) = B$ y $T(C) = D$?

b) ¿Existe alguna simetría axial S en $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ tal que $S(A) = B$ y $S(C) = D$? ¿Es única? En el caso de respuestas positivas, calcula los elementos geométricos de S.

6. Sean $\mathcal{R} = \{\mathcal{O}; e_1, e_2\}$ una referencia ortonormal y $f : \mathbb{A}^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ un giro de ángulo $\pi/2$ y centro un punto en la recta $x + y = 1$.

a) Escribe la matriz de la aplicación lineal asociada a f.

b) Escribe la expresión en coordenadas de f respecto de $\mathcal{R}$.

c) Calcula la imagen por f del punto $(1, 1)$.

d) Describe geométricamente las imágenes de $(1, 1)$ por todos los giros de ángulo $\pi/2$ y centro un punto en la recta $x + y = 1$.

7. Determina las ecuaciones (respecto del sistema de referencia canónico de $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$) del movimiento helicoidal de eje la recta $x = y = z$, ángulo de rotación $\theta = \pi$ y vector de traslación $\vec{v} = (3, 3, 3)$.

8. Encuentra la expresión analítica de las siguientes isometrías de $\mathbb{R}^3$:

a) La reflexión o simetría respecto al plano $3x - y + 2z = 1$.

b) La rotación helicoidal respecto al eje $\langle(1, -1, 0)\rangle$, con ángulo π y vector de traslación $(2, -2, 0)$.

c) La composición de la isometría del apartado a) con la del apartado b).

9. Estudia las siguientes isometrías de $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} x' = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y + \frac{1}{2}z \\ y' = -1 + \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}z \\ z' = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y + \frac{1}{2}z \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} x' = 1 + y \\ y' = 1 - z \\ z' = -x \end{cases}$$

10. Sea $f : \mathbb{A}^3(\mathbb{R}) \to \mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ la afinidad cuyas ecuaciones respecto al sistema de referencia ortonormal $\mathcal{R} = \{\mathcal{O}; e_1, e_2, e_3\}$ son

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

a) Demuestra que f es una isometría (movimiento).

b) Decide de manera razonada si f preserva o invierte la orientación.

c) ¿Tiene f puntos fijos?

d) Clasifica la isometría y describe sus elementos geométricos.

11. Sea $f : \mathbb{A}^3(\mathbb{R}) \to \mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ la afinidad cuyas ecuaciones respecto al sistema de referencia ortonormal $\mathcal{R} = \{\mathcal{O}; e_1, e_2, e_3\}$ son

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Prueba que es una isometría, clasifícala y describe sus elementos geométricos.

12. Sea $f : \mathbb{A}^3(\mathbb{R}) \to \mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ la isometría cuyas ecuaciones respecto al sistema de referencia ortonormal $\mathcal{R} = \{\mathcal{O}; e_1, e_2, e_3\}$ son

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{2}{3}\begin{pmatrix} -1/2 & 1 & 1 \\ 1 & -1/2 & 1 \\ 1 & 1 & -1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Clasifica esta isometría y describe sus elementos geométricos.

13. Considera las isometrías $f_j(X) = a_j + AX$ con

$$A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 & 7 & -4 \\ 1 & 4 & 8 \\ 8 & -4 & 1 \end{pmatrix} \qquad a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad a_2 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Estudia cada uno de estos movimientos indicando sus elementos geométricos.