Geometría Afín I:
Espacio afín. Subespacios afines

1. Sea $(\mathcal{A}, V, \varphi)$ un espacio afín, y sea (L, W, φ) un subespacio afín (o variedad lineal), es decir, $L = p_0 + W$, donde p_0 es un punto en $\mathcal{A}$.

a) Demuestra que si $p, q \in L$, entonces $\varphi(p, q) \in W$ (con lo cual la aplicación $\varphi : L \times L \to W$ está bien definida).

b) Demuestra que (L, W, φ) es un espacio afín en sí mismo, es decir, satisface los dos axiomas de la definición de espacio afín.

2. Sea (A, V, φ) un espacio afín. Dado un vector $\vec{v} \in V$ y cuatro puntos p, q, r, s tales que $r = p + \vec{v}$ y $s = q + \vec{v}$, demuestra que $\vec{pq} = \vec{rs}$.

3. Sea S el conjunto de puntos (x, y, z) de $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ que satisfacen la condición $2x + y - z = 3$. Demuestra, usando la definición, que S es un subespacio afín de $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$.

4. Demuestra que un subconjunto H del espacio afín $\mathbb{A}^n_k$ es una variedad lineal si y sólo si *para todo par de puntos de H la recta que los une está contenida en H*.

5. Sea $T := \cup_{n \in \mathbb{N}} \{x + y = n\}$. Decide, de manera razonada, si el conjunto T es una subvariedad lineal de $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$.

6. Considera el siguiente par de rectas del espacio afín $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$:

$$r := \{(1, 0, 1)\} + \langle (1, \alpha, 0) \rangle, \quad \text{y} \quad s := \{(1, 1, 2)\} + \langle (1, 1, \beta) \rangle.$$

a) Estudia la posición relativa r y s dependiendo de los valores de α y β.

b) Describe la variedad lineal $r + s$ dependiendo de los valores de α y β.

7. En $\mathbb{A}^3$, considera los conjuntos

$$B = \{(x, y, z) : x + 2y - z = 1\} \quad \text{y} \quad C = \{(x, y, z) : x - y + 2z = 2 \text{ y } x - z = 1\}.$$

a) Demuestra que B y C son variedades lineales (es decir, escribe cada una de ellas de la forma $p + W$, donde $p \in A$ y W subespacio de $V = \mathbb{R}^3$; en realidad p es un punto cualquiera en la variedad y W es el espacio generado por sus vectores directores).

b) Determina si B y C se cortan, son paralelas, o se cruzan. Si se cortan, halla su intersección.

8. En $\mathbb{A}^4$, considera los conjuntos

$$B = \{(x, y, z, w) : x = 1, y = 2\} \quad \text{y} \quad C = \{(x, y, z, w) : z = -2, w = 3\}.$$

a) Demuestra que B y C son variedades lineales.

b) Determina si B y C se cortan, son paralelas, o se cruzan. Si se cortan, halla su intersección.

9. En el espacio afín $\mathbb{A}^3$ estudia la posición relativa de las variedades lineales

$$t := \{(1,0,0)\} + \langle (0,2,1) \rangle, \quad \text{y} \quad w := \{(x,y,z) : x + 2y + z = 1\}$$

dependiendo de la característica del cuerpo base K. En caso de incidencia, describe la variedad lineal intersección y suma.

10. Considera la familia de planos $2\lambda x + (\lambda+1)y - 3(\lambda-1)z + 2\lambda - 4 = 0$ en $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$.

a) Demuestra que estos planos tienen una recta en común.

b) Determina los planos de la familia que pasan por el punto $(1,-1,2)$.

c) Determina los planos de esta familia que son paralelos a la recta:

$$L := \{x + 3z - 1 = 0, y - 5z + 2 = 0\}.$$

11. Encuentra la recta que corta a las rectas

$$s = \begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + 2y + 3z + 4 = 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad t = \begin{cases} x + y + 3z - 1 = 0 \\ x + 2z - 5 = 0 \end{cases},$$

y pasa por $P = (1,6,-3)$.

12. Consideremos las rectas $L_1 = \{x + y + z = x + 2y = 0\}$, $L_2 = \{2x + 2y + z = 3,\ x + y = 2\}$ y $L_3 = \{3x + 2y + 2z = 2,\ 2x + y + z = 0\}$ del espacio afín $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$.

a) Demuestra que se cruzan dos a dos. **b)** ¿Existe algún plano π paralelo a las tres rectas?