Formas cuadráticas

1. Dadas las siguientes aplicaciones

$$\begin{aligned} &\phi_1 : \mathbb{R}_4[x] \times \mathbb{R}_4[x] \longrightarrow \mathbb{R}, && \phi_1(p,q) = p(1)q(-1) + p(-1)q(1). \\ &\phi_2 : M_2(\mathbb{R}) \times M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, && \phi_2(A,B) = \text{traza}(AMB^t), \quad \text{donde } M \in M_2(\mathbb{R}) \text{ está fijada.} \end{aligned}$$

se pide para $i = 1, 2$:

(i) Probar que ϕ_i es una forma bilineal.

(ii) Hallar la matriz de ϕ_i en la base canónica.

(iii) Determinar el rango y la inercia de la forma cuadrática Q_i asociada a ϕ_i.

2. Para las siguientes aplicaciones

$$\begin{aligned} &Q_1 : M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, && Q_1(A) = \text{Traza}(A^2) \\ &Q_2 : M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, && Q_2(A) = \det(A) \\ &Q_3 : \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}, && Q_3(P) = 2P(1)P'(1) \end{aligned}$$

se pide para $i = 1, 2, 3$:

(i) Probar que Q_i es una forma cuadrática.

(ii) Hallar la matriz de Q_i en la base canónica.

(iii) Determinar el rango y la inercia de Q_i.

3. Diagonalizar en una base ortonormal las siguientes formas cuadráticas:

$$\begin{aligned} &Q_1(x,y) = -2x^2 + y^2 + 4xy \\ &Q_2(x,y,z) = x^2 + y^2 - 2xz + 2yz \\ &Q_3(x,y,z) = x^2 + y^2 + 2z^2 - 2xz + 2yz \\ &Q_4(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4xz \\ &Q_5(x,y,z) = xy + yz + zx \\ &Q_6(x,y,z,t) = x^2 + 4xt + 4y^2 + 4yz + z^2 + 4t^2 \end{aligned}$$

Encontrar la signatura de las anteriores formas cuadráticas y estudiar si son equivalentes.

4. Sea V un K-espacio vectorial, $\phi : V \times V \longrightarrow K$ una forma bilineal y $Q : V \longrightarrow K$ la forma cuadrática asociada a ϕ (es decir, $Q(u) = \phi(u,u)$ para $u \in V$). Demostrar que existe una única forma bilineal simétrica $\tilde{\phi} : V \times V \longrightarrow K$ tal que $Q(u) = \tilde{\phi}(u,u)$ para $u \in V$. A la forma bilineal $\tilde{\phi}$ se le conoce con el nombre de forma polar de Q.

5. Aplicar el método de completar cuadrados de Gauss a las siguientes formas cuadráticas:

$$\begin{aligned} &Q_1(x,y,z) = x^2 + 5y^2 - 2xy + 2xz \\ &Q_2(x,y,z) = xy + 2xz \\ &Q_3(x,y,z) = x^2 - z^2 - 2xy + xz \\ &Q_4(x,y,z) = 2x^2 + y^2 + 5z^2 - 2xy + 6xz - 2yz \\ &Q_5(x,y,z) = 3x^2 + 2y^2 + z^2 - 6xy + 4xz \end{aligned}$$

Encontrar la signatura de las anteriores formas cuadráticas y estudiar si son equivalentes.

6. Estudiar para que valores de a las siguientes formas cuadráticas son definidas positivas, definidas negativas o indefinidas y hallar los índices de inercia en función de a.

$$
\begin{aligned}
Q_1(x,y,z) &= ax^2 + y^2 + z^2 + 2axy + 2a^2xz + 2ayz \\
Q_2(x,y,z) &= ax^2 + 2xy + ay^2 + 2ayz + 2az^2 \\
Q_3(x,y,z) &= x^2 + a(a-1)y^2 + 2axy + 2xz + 4ayz \\
Q_4(x,y,z) &= x^2 + 2xy + ay^2 + 2xz + 2ayz + 3z^2 \\
Q_5(x,y,z) &= 5x^2 + y^2 + az^2 + 4xy - 2xz - 2yz \\
Q_6(x,y,z) &= x^2 + 4y^2 + z^2 + 2axy + 10xz + 6yz \\
Q_7(x,y,z) &= x^2 + 4y^2 + z^2 + 2axy + 2ayz \\
Q_8(x,y,z) &= (a+1)x^2 + (a+1)y^2 + az^2 + 2xy - 2ayz \\
Q_9(x,y,z) &= ax^2 + 2xy + ay^2 + 2ayz + 2az^2
\end{aligned}
$$

7. Determinar los valores $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ para los que la forma cuadrática

$$\phi(x,y,z,t) = x^2 + 3y^2 - 4z^2 + \lambda t^2 + 2\mu xy$$

es degenerada. Calcular el rango y la inercia de ϕ en función de λ, μ.

8. Estudiar para que valores de $a, b \in \mathbb{R}$ las formas cuadráticas dadas por las siguientes matrices definen un producto escalar en $\mathbb{R}^3$.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & a \\ 0 & a & 0 \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} a & 2b & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

9. Sea V un espacio vectorial real y $Q : V \to \mathbb{R}$, $Q' : V \to \mathbb{R}$ dos formas cuadráticas. Estudia si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifica cada repuesta. (Recuerda que si la afirmación es verdadera hay que dar una demostración mientras que si la afirmación es falsa es suficiente con dar un contraejemplo)

(i) Existe una única forma bilineal $\phi : V \times V \to \mathbb{R}$ tal que $Q(u) = \phi(u,u)$ para $u \in V$.

(ii) Existe una única forma bilineal simétrica $\phi : V \times V \to \mathbb{R}$ tal que $Q(u) = \phi(u,u)$ para $u \in V$.

(iii) Si todos los valores propios de la matriz de Q son positivos, entonces Q es definida positiva.

(iv) Si Q y Q' son definidas positivas, entonces $Q + Q'$ también es definida positiva.

(v) Si Q es indefinida, entonces Q es degenerada.