

**Espacio vectorial euclídeo III:
Aplicaciones ortogonales.**

1. Sea $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio vectorial euclídeo y $f : V \rightarrow V$ una aplicación tal que $\langle f(u), f(v) \rangle = \langle u, v \rangle$ para todo $u, v \in V$. Demostrar que f es lineal. (Sugerencia: calcular $\|f(u+v) - f(u) - f(v)\|$ y $\|f(\alpha u) - \alpha f(u)\|$).

2. Sea f un endomorfismo de un espacio vectorial euclídeo $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ que cumple $\langle u + f(u), u - f(u) \rangle = 0$ para todo $u \in V$.

a) Comprobar que f es ortogonal.

b) Supongamos que existe un vector no nulo $v \in V$ tal que $f(u) + u$ es proporcional a v para todo $u \in V$. ¿Qué endomorfismo es f ?

3. Consideramos \mathbb{R}^2 con el producto escalar habitual. Determinar los endomorfismos ortogonales f de \mathbb{R}^2 que verifican:

a) $f^2(x, y) = (x, y)$.

b) $f^2(x, y) = -(x, y)$.

4. Consideramos \mathbb{R}^2 con el producto escalar habitual y $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ una aplicación lineal cuya matriz con respecto a la base canónica es M .

a) Si $M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & -\alpha \end{pmatrix}$ con $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ demostrar que f es la simetría (ortogonal) con respecto a la recta $ax + by = 0$, donde

$$\alpha = \frac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2} \quad \text{y} \quad \beta = \frac{-2ab}{b^2 + a^2}.$$

b) Encontrar la recta de simetría para $\alpha = 3/5$ y $\beta = -4/5$.

c) Encontrar la simetría con respecto a la recta $y = 0$.

5. Consideramos \mathbb{R}^2 con el producto escalar habitual y $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ una aplicación lineal cuya matriz con respecto a la base $\mathcal{B} = \{(1, 0), (1, 1)\}$ es

$$M_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 2\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ó} \quad M_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{3} - 1 & -2 \\ 1 & 1 + \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Determinar en qué caso f es ortogonal. En caso afirmativo si corresponde a un giro (en cuyo caso encontrar el ángulo de giro) o una simetría (en cuyo caso encontrar el eje de simetría).

6. Describe el efecto geométrico de las siguientes aplicaciones ortogonales de \mathbb{R}^2 :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y \end{cases} \quad \begin{cases} x' = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y \\ y' = \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y. \end{cases}$$

Estudia la composición de las anteriores.

7. Sea $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio vectorial euclídeo de dimensión n . Se denota por $SO(n)$ al conjunto de las aplicaciones ortogonales $f : V \rightarrow V$ con determinante igual a 1. Sea $V = \mathbb{R}^2$ y sean $u, v \in V$ dos vectores unitarios. Fijada una orientación en V , demuestra que existe una única aplicación $f \in SO(2)$ tal que $f(u) = v$.

8. Sea $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio vectorial euclídeo de dimensión 3 y $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$ una base ortonormal. Consideramos la aplicación lineal $f : V \rightarrow V$ definida por:

$$3f(u_1) = 2u_1 - 2u_2 + u_3, \quad 3f(u_2) = \alpha u_1 + u_2 - 2u_3, \quad 3f(u_3) = \beta u_1 + \gamma u_2 + 2u_3.$$

Hallar $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ de manera que f sea una aplicación ortogonal.

9. Consideramos \mathbb{R}^3 con el producto escalar habitual y tomamos la base $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$ de \mathbb{R}^3 donde $u_1 = (1, 1, 0)$, $u_2 = (1, 0, 1)$ y $u_3 = (1, 2, 0)$. Estudiar si son ortogonales los endomorfismos de \mathbb{R}^3 dados en esa base por las matrices

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 6 \\ -1 & -1 & -1 \\ -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

10. Consideramos \mathbb{R}^3 con el producto escalar habitual. Demostrar que los siguientes endomorfismo de \mathbb{R}^3 son ortogonales y estudiar de qué tipo.

a) El endomorfismo cuya matriz respecto de la base canónica es:

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}-2}{4} & -\frac{\sqrt{2}+2}{4} & \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}+2}{4} & \frac{\sqrt{2}-2}{4} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

b) $f(x, y, z) = (z, x, y)$. c) $f(x, y, z) = \frac{1}{3}(-x + 2y + 2z, 2x - y + 2z, 2x + 2y - z)$.

11. Calcular la matriz en la base canónica de \mathbb{R}^3 de:

a) la simetría respecto del plano $x = y$.

b) la simetría respecto al plano $2x + y + z = 0$.

c) giro de amplitud $\pi/2$ con eje $\vec{u} = (0, 1, 1)$, con la orientación dada por el vector \vec{u} .

12. Determinar cuales de las siguiente aplicaciones de \mathbb{R}^3 (con el producto escalar habitual) son ortogonales. En caso afirmativo clasificarlas geoméricamente.

$$\frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 8 & -4 \\ 8 & 1 & 4 \\ -4 & 4 & 7 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 3 & 2 & -6 \\ 6 & -3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{-4}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

13. Estudia las siguientes aplicaciones ortogonales de \mathbb{R}^3 :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y + \frac{1}{2}z \\ y' = \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}z \\ z' = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y + \frac{1}{2}z. \end{cases} \quad \begin{cases} x' = z \\ y' = -y \\ z' = -x. \end{cases}$$

Estudia la composición de las dos aplicaciones anteriores.

14. Denota por S_L la simetría ortogonal en \mathbb{R}^3 con respecto a la recta $L = \mathfrak{L}\{(a, b, c)\}$ y por S_W la reflexión en \mathbb{R}^3 con respecto al plano $W = L^\perp$. Demuestra que $S_W = -S_L$ y la matriz de S_L con respecto a la base canónica de \mathbb{R}^3 es:

$$\frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} \begin{pmatrix} a^2 - b^2 - c^2 & 2ab & 2ac \\ 2ab & -a^2 + b^2 - c^2 & 2bc \\ 2ac & 2bc & -a^2 - b^2 + c^2 \end{pmatrix}.$$