ÁLGEBRA LINEAL Y GEOMETRÍA • **Grado en Matemáticas** • **Grupo**

(Parcial 1 : 3-3-2017) **Curso 2016-2017**

Apellidos, Nombre: ______________________________

Ejercicio 1	Ejercicio 2	Ejercicio 3	Ejercicio 4	TOTAL
10 puntos	10 puntos	10 puntos	10 puntos	40

◇◇◇◇◇◇ **Razonar debidamente las respuestas** ◇◇◇◇◇◇

1. Consideremos las matrices

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad S_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}, \quad \theta \in [0, 2\pi),$$

asociadas respectivamente a rotaciones y reflexiones en $\mathbb{R}^2$.

a) Prueba que cualquier aplicación ortogonal de $\mathbb{R}^2$ se puede expresar como composición de reflexiones.

b) Sea $f(x, y) = (-y, x)$, encuentra dos reflexiones g_1, g_2 tales que $f = g_1 \circ g_2$. Identifica los elementos principales de f, g_1 y g_2.

2. Sea $\psi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forma bilineal dada (en coordenadas de la base canónica de $\mathbb{R}^3$) por:

$$\psi((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

a) Demuestra de manera razonada que ψ es un producto escalar en $\mathbb{R}^3$.

En lo que sigue consideramos el espacio euclídeo $(\mathbb{R}^3, \psi)$ y sea

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x - y + z = 0\}.$$

b) Encontrar $u_1, u_2, u_3 \in \mathbb{R}^3$ tal que $\{u_1, u_2\}$ es una base ortonormal de W y u_3 de $W^\perp$ con respecto a ψ. Denotemos por $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$, donde u_1, u_2, u_3 son los vectores calculados en (b).

c) Demostrar que $\mathcal{B}$ es una base de $(\mathbb{R}^3, \psi)$ **d)** Calcular la matriz de ψ con respecto a $\mathcal{B}$.

e) Calcula la matriz de la proyección ortogonal sobre W con respecto a $\mathcal{B}$.

f) Calcula la matriz de la proyección ortogonal sobre $W^\perp$con respecto a $\mathcal{B}$.

3. En el espacio euclídeo usual $\mathbb{R}^3$ dotado de la orientación canónica, consideramos la transformación ortogonal dada en la base canónica por la matriz

$$A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & -1 & 4 \\ -1 & 8 & 4 \\ -4 & -4 & 7 \end{pmatrix}$$

Determínese su tipo, especificando los planos, rectas y/o ángulos de reflexión o rotación que tenga.

4. Sea $V = (\mathbb{R}^2, \langle , \rangle)$ el espacio euclídeo donde el producto escalar está definido por:

$$\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle = x_1 x_2 + x_2 y_1 + x_1 y_2 + 2 y_1 y_2.$$

Sea $f : V \longrightarrow V$ la aplicación definida (en las coordenadas de la base canónica) como

$$f(x, y) = (3x, y - x).$$

a) Decidir si f es una aplicación autoadjunta en V.

b) En caso en el que f sea autoadjunta, encontrar una base $\mathcal{B}$ ortonormal de V en el que la matriz $M_{\mathcal{B}}(f)$ sea diagonal.