SOLUCIONES

1. Sea $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forma cuadrática dada por:

$$Q(x,y,z) = (x\ y\ z)\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1/4 \\ 1 & 2 & -3/4 \\ -1/4 & -3/4 & 1/4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

a) Calcula los índices de inercia de Q.

b) Calcula una forma canónica para Q junto con la matriz de cambio de coordenadas.

SOLUCIÓN: a) Para calcular los índices de inercia utilizaremos el criterio de Sylvester. Calculamos los menores principales

$$|A_1| = 1, \qquad |A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1, \qquad |A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1/4 \\ 1 & 2 & -3/4 \\ -1/4 & -3/4 & 1/4 \end{vmatrix} = -1/16.$$

Nótese que $|A_1| \neq 0$ y $|A_2| \neq 0$, y además $|A_1| > 0$, $|A_2|/|A_1| > 0$, y $|A_3|/|A_2| < 0$. Por lo tanto, los índices de inercia de Q vienen dados por $(N_+, N_-, N_0) = (2,1,0)$.

En el apartado b) se puede ver una forma alternativa de calcular los índices de inercia.

b) Reduciremos Q a forma canónica utilizando el método de completar cuadrados de Gauss. Para ello, escribiremos

$$\begin{aligned} Q(x,y,z) &= x^2 + 2y^2 + \frac{1}{4}z^2 + 2xy - \frac{1}{2}xz - \frac{3}{2}yz \\ &= \left(x + y - \frac{1}{4}z\right)^2 + y^2 - yz + \frac{3}{16}z^2 \\ &= \left(x + y - \frac{1}{4}z\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}z\right)^2 - \frac{1}{16}z^2 \\ &= \left(x + y - \frac{1}{4}z\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}z\right)^2 - \left(\frac{1}{4}z\right)^2, \end{aligned}$$

o lo que es lo mismo, $Q(x',y',z') = (x')^2 + (y')^2 - (z')^2$, con el cambio de variable

$$\left\{\begin{array}{l} x' = x + y - \frac{1}{4}z \\ y' = y - \frac{1}{2}z \\ z' = \frac{1}{4}z \end{array}\right. \qquad \Longrightarrow \qquad \left\{\begin{array}{l} x = x' - y' - z' \\ y = y' + 2z' \\ z = 4z' \end{array}\right. .$$

Llamando Q a la matriz del enunciado y P a la matriz de cambio de base, en forma matricial se tiene que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = P^tQP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1/4 \\ 1 & 2 & -3/4 \\ -1/4 & -3/4 & 1/4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Observar que como la forma normal esta dada por $Q(x',y',z') = (x')^2 + (y')^2 - (z')^2$, el índice de inercia positivo (es decir, el número de coeficientes positivos de la forma normal) es 2 y el índice de inercia negativo (es decir, el número de coeficientes negativos de la forma normal) es 1.

2. Consideremos, en el espacio afín $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$, las rectas

$$r_1 = \{x + y = 3,\, z - x = 2\}, \qquad r_2 = \{2x + y - z = 1,\, z - x = 1\}.$$

a) Halla unas ecuaciones paramétricas de r_1 y r_2.

b) Identifica la posición relativa entre ambas rectas.

c) Calcula la distancia entre r_1 y r_2.

d) Decide razonadamente si existe una recta s de manera que:

$$\begin{array}{cc} r_1 \perp s, & r_2 \perp s, \\ r_1 \cap s \neq \emptyset, & r_2 \cap s \neq \emptyset. \end{array}$$

En caso afirmativo halla ecuaciones de s cumpliendo las condiciones anteriores.

SOLUCIÓN: a) Para la recta r_1 tenemos

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x - z = -2 \end{cases} \implies \begin{cases} x - z = -2 \\ y + z = 5 \end{cases} \implies \begin{cases} x = -2 + \lambda \\ y = 5 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Poniendo $P_1 = (-2, 5, 0)$ y $v = (1, -1, 1)$, se tiene que r_1 es la recta que pasa por P_1 y tiene como vector director v. Análogamente, para r_2 podemos escribir

$$\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ x - z = -1 \end{cases} \implies \begin{cases} x - z = -1 \\ y + z = 3 \end{cases} \implies \begin{cases} x = -1 + \mu \\ y = 3 - \mu \\ z = \mu \end{cases}$$

La recta r_2 es la recta que pasa por $P_2 = (-1, 3, 0)$ y, al igual que r_1, tiene como vector director $v = (1, -1, 1)$.

b) Por el apartado anterior sabemos que r_1 y r_2 tienen la misma dirección. Para ver que de hecho r_1 y r_2 son paralelas, basta con darse cuenta de que $r_1 \cap r_2 = \emptyset$. En efecto, si tuviéramos $P = (x, y, z) \in r_1 \cap r_2$, se verificarían simultáneamente las condiciones $z - x = 2$ y $z - x = 1$, lo que nos lleva a una contradicción.

c) Teniendo en cuenta que r_1 y r_2 son paralelas, sabemos que en particular $d(r_1, r_2) = d(P_1, r_2)$, que se puede calcular con la fórmula[1]

$$d(P_1, r_2) = \frac{\|\overrightarrow{P_1P_2} \times v\|}{\|v\|} = \frac{\|(2, 1, -1)\|}{\|(1, -1, 1)\|} = \sqrt{2}, \qquad \text{donde hemos usado que } \overrightarrow{P_1P_2} = (1, -2, 0).$$

---

[1]Sea P un punto y $r = Q + \mathcal{L}(v)$ una recta en $\mathbb{R}^3$. Veamos una demostración de la fórmula

$$d(P, r) = \frac{\|\overrightarrow{PQ} \times v\|}{\|v\|}.$$

Sabemos $d(P, r) = d(P, \mathrm{Pr}_r^{\perp}(P)) = \|\overrightarrow{P\mathrm{Pr}_r^{\perp}(P)}\|$, donde $\mathrm{Pr}_r^{\perp}(P)$ denota la proyección ortogonal de P sobre r. Tenemos $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{P\mathrm{Pr}_r^{\perp}(P)} + \overrightarrow{\mathrm{Pr}_r^{\perp}(P)Q}$. Ahora

$$\overrightarrow{PQ} \times v = (\overrightarrow{P\mathrm{Pr}_r^{\perp}(P)} \times v) + (\overrightarrow{\mathrm{Pr}_r^{\perp}(P)Q} \times v) = \overrightarrow{P\mathrm{Pr}_r^{\perp}(P)} \times v,$$

ya que $\overrightarrow{\mathrm{Pr}_r^{\perp}(P)Q} \times v = 0$ (porque $\mathrm{Pr}_r^{\perp}(P), Q \in r$). Así

$$\|\overrightarrow{PQ} \times v\| = \|\overrightarrow{P\mathrm{Pr}_r^{\perp}(P)} \times v\| = \|\overrightarrow{P\mathrm{Pr}_r^{\perp}(P)}\|\|v\||\mathrm{sen}(\alpha)|,$$

donde α es el ángulo entre los vectores $\overrightarrow{P\mathrm{Pr}_r^{\perp}(P)}$ y v. Ahora, como $\overrightarrow{P\mathrm{Pr}_r^{\perp}(P)} \perp v$ obtenemos que $\alpha = \pm\pi/2$ y por lo tanto $|\mathrm{sen}(\alpha)| = 1$, que concluye la demostración.

Otra forma de calcular la distancia es utilizando la formula general de la distancia entra variedades lineales: sean $L_1 = P_1 + \overrightarrow{L_1}$ y $L_2 = P_2 + \overrightarrow{L_2}$ subespacios afines y $V = (\overrightarrow{L_1} + \overrightarrow{L_2})^{\perp}$. Entonces

$$d(L_1, L_2) = \|\mathrm{Pr}_V^{\perp}(\overrightarrow{P_1P_2})\|.$$

En nuestro caso $L_1 = r_1 = P_1 + \mathcal{L}(v)$, $L_2 = r_2 = P_2 + \mathcal{L}(v)$ y $V = \mathcal{L}(v)^{\perp}$. Como $v = (1, -1, 1)$, una base de V es $\{u_1 = (1, 1, 0), u_2 = (0, 1, 1)\}$. Utilizando el algoritmo ortogonalización de Gram-Schmidt obtenemos que $\{u_1, v_2\}$ es una base ortogonal de V donde

$$v_2 = u_2 - \frac{u_2 \cdot u_1}{\|u_1\|^2}\, u_1 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right).$$

Por lo tanto, si $w \in \mathbb{R}^3$ se tiene

$$\mathrm{Pr}_V^{\perp}(w) = \frac{w \cdot u_1}{\|u_1\|^2}\, u_1 + \frac{w \cdot v_2}{\|v_2\|^2}\, v_2,$$

que aplicado al caso de $w = \overrightarrow{P_1P_2} = (1, -2, 0)$ se obtiene:

$$\mathrm{Pr}_V^{\perp}(\overrightarrow{P_1P_2}) = (0, -1, -1).$$

Concluyendo: $d(r_1, r_2) = \|(0, -1, -1)\| = \sqrt{2}$.

Obsérvese que en nuestro caso como r_1 y r_2 son paralelas, entonces podríamos haber utilizado la fórmula en el caso particular en el que L_1 y L_2 son subespacios afines paralelos. En ese caso, si $\overrightarrow{L_1} \subseteq \overrightarrow{L_2}$ entonces $d(L_1, L_2) = d(P, L_2)$ para cualquier $P \in L_1$. Utilizando que $d(P, L_2) = d(P, \mathrm{Pr}_{\overrightarrow{L_2}^{\perp}}^{\perp}(\overrightarrow{PQ}))$ para cualquier $Q \in L_2$. En nuestro caso como $\overrightarrow{L_1} = \overrightarrow{L_2}$ obtenemos la misma fórmula que en el caso general.

También se puede resolver de manera alternativa, utilizando el siguiente apartado.

d) Consideremos la suma de variedades lineales

$$\pi := r_1 + r_2 = P_1 + L\big[\overrightarrow{P_1P_2}, v\big] = (-2, 5, 0) + L\big[(1, -2, 0), (1, -1, 1)\big].$$

El plano π contiene a r_1, r_2, y a cualquier recta que una un punto de r_1 y otro de r_2. Utilizando Gram-Schmidt, encontramos un vector $w \in \overrightarrow{\pi}$ tal que $v \perp w$:

$$w = \overrightarrow{P_1P_2} - \frac{< \overrightarrow{P_1P_2}, v >}{< v, v >} v = (1, -2, 0) - \frac{3}{3}(1, -1, 1) = (0, -1, -1).$$

Definiendo $s := \{P_1\} + L[w]$, que viene dada por las ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x = -2 \\ y = 5 - \nu \\ z = -\nu \end{cases}$$

es evidente que s cumple las condiciones requeridas. En efecto, como $v \perp w$, tenemos que $r_1 \perp s$ y $r_2 \perp s$. Además, $r_1 \cap s = \{P_1\}$ y también $r_2 \cap s = \{P_2'\}$, siendo $P_2' = (-2, 4, -1)$. Como era de esperar, se verifica $|\overrightarrow{P_1P_2'}| = |(0, -1, -1)| = \sqrt{2}$.

3. Consideremos la aplicación afin $f : \mathbb{A}^3(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ dada por

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

a) Demostrar que f es un movimiento.

b) Determínese su tipo, especificando los elementos geométricos que lo caracterizan.

SOLUCIÓN:

a) f es un movimiento porque es una afinidad (la composición de una aplicación lineal seguida de una traslación) y su aplicación lineal asociada es una aplicación ortogonal (porque su matriz, A, con respecto a la base canónica satisface $A^t A = I$).

b) Sea A la matriz en la base canónica de la aplicación ortogonal asociada: A no es simétrica, luego la aplicación ortogonal asociada no es autoadjunta; y determinante de A es igual a 1, luego la aplicación ortogonal asociada es un giro y, por tanto, el movimiento es un giro respecto de una recta afín o un movimiento helicoidal (si no tiene puntos fijos).

Veamos sus elementos geométricos: La dirección del eje de giro es el subespacio de vectores fijados por la aplicación ortogonal; es decir, es igual al

$$\text{Nuc}(A - I) = \mathcal{L}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \mathcal{L}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \mathcal{L}(\overrightarrow{u_1}),$$

siendo $\overrightarrow{u_1}$ el vector unitario en esa dirección y sentido. Otra forma de obtenerlo es de la parte antisimétrica de nuestra matriz ortogonal A; es decir,

$$\frac{1}{2}(A - A^t) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{sen}\theta \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix},$$

siendo el vector (a, b, c) el unitario que da el sentido del giro ortogonal. En este caso, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) = \operatorname{sen}\theta(a, b, c)$, de donde se deduce que $(\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2})^2 + (-\frac{1}{2})^2 = \operatorname{sen}\theta^2$. Luego $\operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$. También $(a, b, c) = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}})$.

Veamos a quién es igual el coseno:

$$\text{traza}(A) = 0 = 1 + 2\cos\theta$$

luego $\cos\theta = \frac{-1}{2}$ y tenemos que $\theta = \frac{2\pi}{3}$.

Otra forma de encontrar el seno del ángulo de giro θ es eligiendo una base ortonormal adecuada en la que el giro ortogonal se representa con su forma de Jordan real: tenemos $\overrightarrow{u_1}$ que nos da el plano ortogonal al eje de giro: $x + y - z = 0$. Elegimos un vector unitario de dicho plano,

$$\overrightarrow{u_2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

y el producto vectorial de $\overrightarrow{u_1}$ por $\overrightarrow{u_2}$ es el vector que falta:

$$\overrightarrow{u_3} = \overrightarrow{u_1} \times \overrightarrow{u_2} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

Entonces, el producto escalar usual de $A(\overrightarrow{u_2})$ por $\overrightarrow{u_3}$, que es $\frac{\sqrt{3}}{2}$, es el seno de θ, luego el ángulo con el sentido de giro de $\overrightarrow{u_1}$ es nuevamente, como tenía que ser, $\frac{2\pi}{3}$.

Es un movimiento helicoidal porque no tiene puntos fijos; es decir, no existen soluciones a $X = f(X) = \overrightarrow{a} + A(X)$, ya que sale sistema incompatible. Otra forma de verlo es que el vector traslación con el que componemos la aplicación ortogonal para obtener el movimiento f,

$$\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

no es ortogonal a $\overrightarrow{u_1}$, luego es movimiento helicoidal. Hacemos la proyección ortogonal de $\overrightarrow{a}$ en la dirección de $\overrightarrow{u_1}$, que es igual a

$$\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

que es justamente el vector desplazamiento que aparece involucrado en el movimiento helicoidal. Nos falta el eje de giro, que es la recta de puntos fijos del movimiento g, siendo: $g(X) = \overrightarrow{a} - \overrightarrow{v} + A(X)$. Resolviendo, sale la recta $r : \{x = y + 1,\, y = -z\}$.
Otra forma de obtener la anterior recta, que es el eje de giro del movimiento helicoidal f, es resolviendo el sistema $(A - I)^2(X) + (A - I)a = 0$ de donde obtenemos la variedad característica, que vuelve a salir la recta r. De esta última forma, para obtener el vector desplazamiento o deslizamiento, $\overrightarrow{v}$, tomamos un punto de dicha recta característica $p \in r$ y calculamos

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{pf(p)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

como tenía que salir.