SOLUCIONES

1. Consideremos las matrices

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad S_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}, \quad \theta \in [0, 2\pi),$$

asociadas respectivamente a rotaciones y reflexiones en $\mathbb{R}^2$.

a) Prueba que cualquier aplicación ortogonal de $\mathbb{R}^2$ se puede expresar como composición de reflexiones.

b) Sea $f(x,y) = (-y,x)$, encuentra dos reflexiones g_1, g_2 tales que $f = g_1 \circ g_2$. Identifica los elementos principales de f, g_1 y g_2.

SOLUCIÓN: a) Sabemos que toda aplicación ortogonal de $\mathbb{R}^2$ es una rotación o una reflexión. Como afirma el enunciado, S_θ es una reflexión: de hecho se tiene $S_\theta S_\theta^t = I_2$ y $|S_\theta| = -1$. Por lo tanto sólo nos queda por demostrar que cualquier rotación se puede poner como composición de reflexiones. Para ello podemos ver que $R_\theta = S_\theta \cdot S_0$:

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

O de forma similar ver que $S_{\theta_1} \cdot S_{\theta_2} = R_{\theta_1 - \theta_2}$:

$$\begin{pmatrix} \cos\theta_1 & \operatorname{sen}\theta_1 \\ \operatorname{sen}\theta_1 & -\cos\theta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta_2 & \operatorname{sen}\theta_2 \\ \operatorname{sen}\theta_2 & -\cos\theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_1\, \cos\theta_2 + \operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2 & \cos\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2 - \cos\theta_2 \operatorname{sen}\theta_1 \\ \cos\theta_2\, \operatorname{sen}\theta_1 - \cos\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2 & \cos\theta_1\, \cos\theta_2 + \operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2 \end{pmatrix}$$

junto con las identidades trigonométricas:

$$\begin{aligned} \cos(\theta_1 - \theta_2) &= \cos\theta_1\, \cos\theta_2 + \operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2, \\ \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2) &= \cos\theta_2\, \operatorname{sen}\theta_1 - \cos\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2. \end{aligned}$$

b) Se puede ver que si $\mathcal{B}_c$ es la base canónica de $\mathbb{R}^2$, entonces $M_{\mathcal{B}_c}(f) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Por lo que podemos identificar que f es una rotación de ángulo $\pi/2$. Se puede ver que

$$f = g_1 \circ g_2 \qquad \text{donde} \left\{ \begin{array}{l} g_1(x,y) = (y,x) \\ g_2(x,y) = (x,-y) \end{array} \right\} \Longrightarrow M_{\mathcal{B}_c}(g_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad M_{\mathcal{B}_c}(g_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Así tenemos que g_1 y g_2 son reflexiones con respecto a rectas. Para calcular estas rectas se ve que las rectas que quedan invariantes son $x = y$ bajo la acción de g_1 y la recta $y = 0$ bajo la acción de g_2.

2. Sea $\psi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forma bilineal dada (en coordenadas de la base canónica de $\mathbb{R}^3$) por:

$$\psi((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

a) Demuestra de manera razonada que ψ es un producto escalar en $\mathbb{R}^3$.

En lo que sigue consideramos el espacio euclídeo $(\mathbb{R}^3, \psi)$ y sea

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x - y + z = 0\}.$$

b) Encontrar $u_1, u_2, u_3 \in \mathbb{R}^3$ tal que $\{u_1, u_2\}$ es una base ortonormal de W y u_3 de $W^\perp$ con respecto a ψ.
Denotemos por $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$, donde u_1, u_2, u_3 son los vectores calculados en (b).

c) Demostrar que $\mathcal{B}$ es una base de $(\mathbb{R}^3, \psi)$

d) Calcular la matriz de ψ con respecto a $\mathcal{B}$.

e) Calcula la matriz de la proyección ortogonal sobre W con respecto a $\mathcal{B}$.

f) Calcula la matriz de la proyección ortogonal sobre $W^\perp$con respecto a $\mathcal{B}$.

SOLUCIÓN: a) Por una parte es evidente que la aplicación ψ es bilineal. Además, ψ es una aplicación simétrica ya que la matriz

$$A = M_{\mathcal{B}_c}(\psi) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

también es simétrica (es decir, $A = A^t$). Para ver que es definida positiva, basta con escribir

$$\psi((x_1, x_2, x_3), (x_1, x_2, x_3)) = 2x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 - 2x_2x_3 + x_3^2 = x_1^2 + (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 \geq 0,$$

y de hecho $\psi((x_1, x_2, x_3), (x_1, x_2, x_3)) = 0$ si y sólo si $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.
También podemos ver que es definida positiva utilizando el Criterio de Sylvester:

$$\det(\mathrm{A}_{11}) = 2 > 0, \qquad \det(\mathrm{A}_{22}) = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 5 > 0, \qquad \det(\mathrm{A}_{33}) = \det(\mathrm{A}) = 1 > 0,$$

Así el Criterio de Sylvester nos asegura que ψ definido un producto escalar en $\mathbb{R}^3$.

b) Pasando a ecuaciones paramétricas encontramos dos generadores de W, por ejemplo $W = L[v_1, v_2]$ con $v_1 = (1, 1, 0)$ y $v_2 = (1, 0, -1)$. Utilizamos el método de ortogonalización de Gram-Schmidt para expresar $W = L[w_1, w_2]$, siendo w_1 y w_2 ortogonales con respecto del producto escalar ψ:

$$w_1 = v_1 = (1, 1, 0), \qquad w_2 = v_2 - \frac{\psi(v_2, w_1)}{\psi(w_1, w_1)} w_1 = (1, 0, -1) - \frac{2}{2}(1, 1, 0) = (0, -1, -1).$$

Nótese que $\psi(w_1, w_1) = 2$ y que $\psi(w_2, w_2) = 1$. A continuación normalizamos w_1 y w_2 para encontrar un sistema de generadores ortonormal (y por lo tanto base) de W.

$$u_1 = \frac{w_1}{\sqrt{\psi(w_1, w_1)}} = \Big(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\Big), \qquad u_2 = \frac{w_2}{\sqrt{\psi(w_2, w_2)}} = (0, -1, -1).$$

Sabemos que $\dim(W^\perp) = 3 - \dim(W) = 1$ y por lo tanto cualquier elemento de $W^\perp$ servirá como generador. Una manera de encontrar un elemento de $W^\perp$ es imponer las condiciones de que sea ortogonal (con respecto a ψ) a dos generadores de W, por comodidad escogemos w_1 y w_2. Resolvemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\psi((x_1,x_2,x_3),(1,1,0)) = x_1 + x_2 - x_3 = 0, \qquad \psi((x_1,x_2,x_3),(0,-1,-1)) = x_1 - x_2 = 0,$$

de donde obtenemos $w_3 = (1,1,2)$, que verifica $\psi(w_3,w_3) = 2$. Por lo tanto, normalizando,

$$u_3 = \frac{w_3}{\sqrt{\psi(w_3,w_3)}} = \Big(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{2}{\sqrt{2}}\Big).$$

c) Sabemos que cualquier subespacio vectorial tiene intersección trivial con su complemento ortogonal. Así, teniendo en cuenta que $\{u_1,u_2\}$ son linealmente independientes y que u_3 es perpendicular a ambos, es suficiente para asegurarnos de que $\mathcal{B} = \{u_1,u_2,u_3\}$ es una base. En cualquier caso, siempre podemos calcular

$$\begin{vmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 2/\sqrt{2} \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

d) Sea $B = (b_{ij})_{i,j=1}^3$ la matriz $B = M_{\mathcal{B}}(\psi)$. Por definición de matriz de una aplicación bilineal con respecto de una base, sabemos que $b_{ij} = \psi(u_i,u_j)$, y como $\mathcal{B}$ es ortonormal con respecto de ψ, se tiene que

$$B = M_{\mathcal{B}}(\psi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

e) Ponemos $C_1 = M_{\mathcal{B}}(P_W^{\perp})$. Las columnas de C_1 son las imágenes por $P_W^{\perp}$ de los vectores de $\mathcal{B}$, expresadas con respecto de la base $\mathcal{B}$. Es decir,

$$P_W^{\perp}(u_1) = u_1 = (1,0,0)_{\mathcal{B}}, \qquad P_W^{\perp}(u_2) = u_2 = (0,1,0)_{\mathcal{B}}, \qquad P_W^{\perp}(u_3) = 0 = (0,0,0)_{\mathcal{B}},$$

luego

$$C_1 = M_{\mathcal{B}}(P_W^{\perp}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

f) Ponemos $C_2 = M_{\mathcal{B}}(P_{W^\perp}^{\perp})$. De manera similar al apartado anterior, o teniendo en cuenta que $I = P_W^{\perp} + P_{W^\perp}^{\perp}$ (lo que implica $I = C_1 + C_2$), obtenemos

$$C_2 = M_{\mathcal{B}}(P_{W^\perp}^{\perp}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

---

3. En el espacio euclídeo usual $\mathbb{R}^3$ dotado de la orientación canónica, consideramos la transformación ortogonal dada en la base canónica por la matriz

$$A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 & 1 & -8 \\ 7 & 4 & 4 \\ 4 & -8 & 1 \end{pmatrix}$$

Determínese su tipo, especificando los planos, rectas y/o ángulos de reflexión o rotación que tenga.

SOLUCIÓN: La matriz A es ortogonal (los excepticos pueden verlo comprobando que $A^tA = I$) y $A^t \neq A$ pues, por ejemplo, $a_{21} = \frac{7}{9} \neq \frac{1}{9} = a_{12}$.
Luego para saber el tipo nos basta ver cúal es su determinante, $\delta = \det A$, un cálculo del mismo o la observación de que

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & 22 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{4}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{7}{9} & \frac{4}{9} \end{vmatrix} = \frac{1}{9} = \delta a_{33} = a_{33}$$

Luego $\delta = 1$, por tanto es un **giro**.

Veamos ahora el ángulo. Sabemos que $\cos\alpha = \frac{1}{2}(\mathrm{Traza}A - \delta) = \frac{1}{2}(1-1) = 0$, ya que $\mathrm{Traza}A = \frac{4}{9}+\frac{4}{9}+\frac{1}{9} = 1$, por tanto $|\operatorname{sen}\alpha| = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = 1$.
Para el signo de α necesitamos orientar el eje de giro y por tanto hallarlo:

Primera forma: Descomponemos $A = S + R$ donde $S = \frac{1}{2}(A + A^t)$ es su parte simétrica y $R = \frac{1}{2}(A - A^t)$ es su parte antisimétrica.
Sabemos que el eje es $\mathrm{Ker}(A - I) = \mathrm{Ker}(R)$, entonces

$$R = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

Luego $\mathrm{Ker}(R) = \mathcal{L}(w)$, donde $w = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.
Entonces para la orientación del eje determinada por w tenemos $\operatorname{sen}\alpha = \| w \| = 1$.
Segunda forma: El eje de giro se obtiene de $\mathrm{Ker}(\mathrm{A} - \mathrm{I}_3) = \mathcal{L}(\mathrm{u}_1)$, donde $u_1 = (-2,-2,1)$. Ahora obtenemos un vector $u_2 \in \mathbb{R}^3$ tal que $u_2 \perp u_1$. Por ejemplo, $u_2 = (1,1,4)$. Por último $u_3 \in \mathbb{R}^3$ tal que $u_3 \perp u_1$ y $u_3 \perp u_2$, de forma que $\{u_1, u_2, u_3\}$ formen una base con la misma orientación que la base canónica. Para ello hacemos:

$$u_3 = u_1 \times u_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = (-9, 9, 0).$$

Ahora denotamos por v_2 y v_3 los normalizados de u_2 y u_3 respectivamente. Utilizamos que

$$\operatorname{sen}\alpha = (Av_2) \cdot v_3 = 1$$

y junto con $\cos\alpha = 0$ deducimos que $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

CONCLUSIÓN: Giro de ángulo $\pi/2$ con eje $\mathcal{L}(u_1)$ con la orientación dada por el vector $u_1 = (-2,-2,1)$.

4. Sea $V = (\mathbb{R}^2, \langle , \rangle)$ el espacio euclídeo donde el producto escalar está definido por:

$$\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle = x_1x_2 + x_2y_1 + x_1y_2 + 2y_1y_2.$$

Sea $f : V \longrightarrow V$ la aplicación definida (en las coordenadas de la base canónica) como

$$f(x, y) = (3x, y - x).$$

a) Decidir si f es una aplicación autoadjunta en V.

b) En caso en el que f sea autoadjunta, encontrar una base $\mathcal{B}$ ortonormal de V en el que la matriz $M_{\mathcal{B}}(f)$ sea diagonal. Dar los vectores de $\mathcal{B}$ en las coordenadas de la base canónica.

SOLUCIÓN: a) Escribimos matricialmente el anterior producto escalar; es decir,

$$\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Denotemos por A la matriz de f en la base canónica y por G la matriz del anterior producto escalar con respecto a la base canónica también. Entonces, si expresamos todo en coordenadas respecto de la base canónica, la propiedad de ser autoadjunta se traduce en lo siguiente:

$$\langle f \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \rangle = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \end{pmatrix} A^t G \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \end{pmatrix} GA \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, f \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \rangle.$$

Comprobamos que, efectivamente,

$$A^t G = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = GA.$$

Luego, f es autoadjunta para el producto escalar dado.
b) Veamos que f diagonaliza en una base ortonormal para el anterior producto: El polinomio característica es: $0 = (3 - \lambda)(1 - \lambda)$, luego los autovalores son $\lambda = 1$ y $\lambda = 3$. Calculando, obtenemos que el espacio de autovectores asociado a cada autovalor es:

$$\mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \quad \text{para } \lambda = 1 \quad \text{y} \quad \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \quad \text{para } \lambda = 3.$$

Se comprueba que estos autovectores son ortogonales:

$$\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle = 0.$$

Por otra parte, necesitamos vectores unitarios, luego calculamos:

$$\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle = 2$$

y

$$\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle = 2$$

Por lo tanto, una base ortonormal B, para el producto escalar dado, de autovectores de f viene dada por

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \right\}.$$

Observar, por otra parte, que la existencia de una base ortonormal para el producto dado de autovectores de f, yendo a la definición, da que f es autoadjunta. Del segundo apartado se obtiene también el primero.