ÁLGEBRA LINEAL Y GEOMETRÍA • Grado en Matemáticas • Grupo 71__

(Examen extraordinario: 22-6-2017) — Curso 2016-2017

Apellidos, Nombre: ____________________

Ejercicio 1	Ejercicio 2	Ejercicio 3	Ejercicio 4	Ejercicio 5	Ejercicio 6	Ejercicio 7	TOTAL
10 puntos	10 puntos	20 puntos	10 puntos	20 puntos	10 puntos	10 puntos	90

◇◇◇◇◇◇ Razonar debidamente las respuestas ◇◇◇◇◇◇

1. Estudia si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifica tu repuesta. (Recuerda que si la afirmación es verdadera hay que dar una demostración mientras que si la afirmación es falsa es suficiente con dar un contraejemplo):

a) En el espacio afín $\mathbb{A}^4(\mathbb{R})$ dos planos siempre se cortan.

b) La composición de dos homotecias de $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ es siempre una homotecia.

c) Sea $f : \mathbb{A}^3(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ una afinidad de la que se sabe que tiene una recta de puntos fijos. Entonces su aplicación lineal asociada $\overrightarrow{f}$ tiene un autovalor con valor 1.

d) La forma cuadrática $Q : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ con $Q(x, y) = xy$ tiene rango dos.

2. Sea la recta $L_a : \{x + y = a,\ z = 2 - a\}$, $a \in \mathbb{R}$.

a) Determina los planos que contienen a L_a.

b) Para $a = 0$, calcula los planos que contienen a la recta L_0 y estén a distancia 1 del punto $P = (1, 0, 0)$.

3. Sea $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y consideramos la matriz

$$M = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ \beta & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Determina los valores de α y β para que la matriz M defina un producto escalar respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^2$.

b) Para $\alpha = 1$ calcula el complemento ortogonal de la recta $\{x = 2y\}$.

c) Para $\alpha = 1$ calcula las ecuaciones de la proyección ortogonal sobre la recta $\{x = 2y\}$.

4. En $\mathbb{A}^4(\mathbb{R})$ demuestra que una variedad lineal L de dimensión 3 y un plano π no contenido en L nunca se cruzan.

5. **a)** Consideremos la familia de afinidades de $A^2(\mathbb{R})$ dadas por las ecuaciones (con respecto a sistema de referencia canónico):

$$f(x,y) = (dx + cy + a, x + b)$$

Determina los valores de los parámetros para los que estas afinidades son movimientos y calcula sus elementos geométricos.

b) Calcula las ecuaciones de la simetría deslizante de eje paralelo a la recta $\{x = y\}$ que transforma el punto $(1,0)$ en el $(1,1)$.

6. En el sistema de referencia ortonormal usual de $\mathbb{R}^2$, considera la cónica de ecuación

$$2xy + 2x + 2y + 1 = 0.$$

a) Determina el tipo de cónica y decide si es degenerada o no.

b) Encuentra un sistema de referencia ortonormal respecto al que la ecuación de la cónica sea canónica.

c) Describe, en las coordenadas originales, los elementos geométricos de la cónica:

- Parábola: Foco, vértice, eje principal y directriz.
- Elipse: Focos, centro y ejes principales.
- Hipérbola: Focos, centro, ejes principales y asíntotas.

7. Sea $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forma quadrática dada por:

$$Q(x, y, z) = x^2 + 3y^2 - 2xy + 4xz - 8yz.$$

a) Obtener una forma canónica para Q.

b) Determina el tipo de las cuádricas que aparecen en la familia uniparamétrica

$$Q(x, y, z) = \alpha,$$

en función del parámetro $\alpha \in \mathbb{R}$.