

**1. Teorema de Conteo de Órbitas.** *Sea  $G$  un grupo y  $X$  un  $G$ -conjunto finito. Entonces*

$$|X/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g|$$

donde:

- $X/G$  es el conjunto de orbitas de  $X$  por la acción de  $G$ ,
- $X^g = \{x \in X : g \cdot x = x\}$ , el conjunto de elementos de  $X$  fijados por  $g$

Demostrar el Teorema dando los siguientes pasos:

a) Sea  $V = \{(g, x) \in G \times X : g \cdot x = x\}$ . Demuestra que

$$|V| = \sum_{g \in G} |X^g| \quad \text{y} \quad |V| = \sum_{x \in X} |G_x|.$$

b) Demuestra

$$\sum_{x \in \text{orb}_G(y)} |G_x| = |G| \quad \text{para todo } y \in X.$$

c) A partir de los dos apartados anteriores demuestra el Teorema de Conteo de Órbitas.

---

**2.** Un juego infantil tiene pentágonos con cada arista pintada de azul, verde o rojo. ¿Cuántos pentágonos diferentes podría tener el juego como máximo?

---