1. Sea G un grupo y $N \leq G$. Demuestra que las siguientes propiedades son equivalentes:

a) $N \triangleleft G$.

b) $gN = Ng$, para todo $g \in G$.

c) $gNg^{-1} \subseteq N$, para todo $g \in G$.

d) $N = \bigcup_{g \in N} \mathrm{cl}(g)$, donde $\mathrm{cl}(g)$ denota la clase de conjugación de g en G.

---

2. Sea D el grupo generado por las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

Se pide:

a) Calcular las clases de conjugación de los elementos de D.

b) Calcular los subgrupos normales de D como unión de clases de conjugación.

c) Calcular el número de clases de isomorfía de grupos cocientes, i.e.

$$\#\{D/N \,:\, N \triangleleft D\}.$$
