ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS • Grado en Matemáticas • **C1**

(13-10-2015) - 10:30 • Curso 2015-2016

SOLUCIONES

---

1. Estudia si la siguiente afirmación es verdadera o falsa. Justifica tu repuesta. (Recuerda que si la afirmación es verdadera hay que dar una demostración mientras que si la afirmación es falsa es suficiente con dar un contraejemplo):

El único homomorfismo de $\mathbb{Z}_6$ en S_3 es el trivial.

Solución: FALSO. En primer lugar recordar que $\mathbb{Z}_6$ es cíclico y podemos generarlo por $\overline{1}$. Por lo tanto cualquier homomorfismo de grupos $f : \mathbb{Z}_6 \longrightarrow S_3$ queda definido por la imagen de $\overline{1}$, esto es $f(\overline{1})$. Ahora basta con ver que si definimos $f_\sigma(\overline{1}) = \sigma$, para cualquier $\sigma \in S_3$, tendremos que f_σ es un homomorfismo de grupos. Basta ver que $f_\sigma(\overline{n}) = \sigma^n$ es homomorfismo.

---

2. Calcula el retículo de subgrupos de $\mathbb{Z}_{12}$.

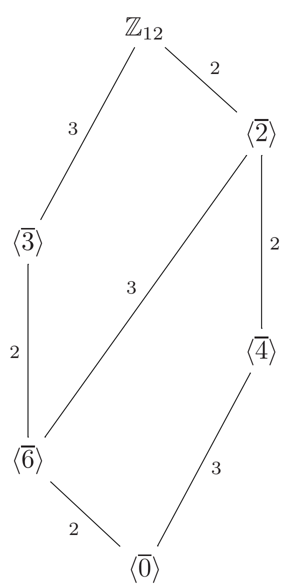
Solución: Los elementos del grupo $\mathbb{Z}_{12}$ son:

$$\mathbb{Z}_{12} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7}, \overline{8}, \overline{9}, \overline{10}, \overline{11}\}.$$

En primer lugar calculamos los subgrupos cíclicos de $\mathbb{Z}_{12}$:

$$\begin{array}{ll} \langle\overline{0}\rangle = \{\overline{0}\}, & \langle\overline{3}\rangle = \langle\overline{9}\rangle = \{\overline{0}, \overline{3}, \overline{6}, \overline{9}\}, \\ \langle\overline{1}\rangle = \langle\overline{5}\rangle = \langle\overline{7}\rangle = \langle\overline{11}\rangle = \mathbb{Z}_{12}, & \langle\overline{4}\rangle = \langle\overline{8}\rangle = \{\overline{0}, \overline{4}, \overline{8}\}, \\ \langle\overline{2}\rangle = \langle\overline{10}\rangle = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{8}, \overline{10}\}, & \langle\overline{6}\rangle = \{\overline{0}, \overline{6}\}. \end{array}$$

Ahora veamos que son los únicos subgrupos de $\mathbb{Z}_{12}$. Sean $\overline{n}, \overline{m} \in \mathbb{Z}_{12}$ tal que $\langle\overline{n}\rangle \not\subset \langle\overline{m}\rangle$ y $\langle\overline{m}\rangle \not\subset \langle\overline{n}\rangle$. Entonces $(n,m) \neq n, m$, por lo tanto $(n,m) = d$ y se tendrá $\langle\overline{n}, \overline{m}\rangle = \langle\overline{d}\rangle$.
Por lo tanto el retículo de subgrupos de $\mathbb{Z}_{12}$ es:



---

3. Calcula todos los grupos abelianos de orden 4 (salvo isomorfismo).

Solución: Sea $G = \{e, a, b, c\}$ tal que e es el elemento neutro de G y $ab = ba$, $ac = ca$.
Vamos a ver las posibilidades de completar la tabla de Cayley de G:

- Supongamos $a^2 = b$. Si $ab = e$, entonces $ac = c$. Pero entonces $a = e$, contradicción. Por lo tanto $ab = c$ y $ac = e$. Es decir, $c = a^3$ y $a^4 = e$. Concluimos que $G = \langle a \rangle \simeq \mathbb{Z}_4$.
- El caso $a^2 = c$ es completamente análogo al anterior.
- Supongamos $a^2 = e$. El caso $ab = b$ no es posible ya que si no $a = e$. Por lo tanto, $ab = c$ y $ac = b$. Ahora:
  - si $b^2 = e$, entonces $bc = a$. Por lo tanto, $c^2 = e$. Concluimos que $G \simeq V_4$.
  - si $b^2 = a$, entonces $bc = e$. Por lo tanto, $c^2 = a$. Es decir, $c^4 = e$ y $b = c^3$. Concluyendo $G = \langle c \rangle \simeq \mathbb{Z}_4$.