ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS (5-12-2015)	•	Grado en Matemáticas Curso 2015-2016	•	Hoja B1

1. (Definición) Consideramos el conjunto $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ con la suma módulo 10 y la multiplicación definida según la fórmula $a \cdot b = \frac{ab}{2}$ mód 10. Demuestra que con esas operaciones A es un anillo, y resuelve la ecuación $6 \cdot x \cdot x = 4$ en dicho anillo.

2. (Definición) Construye tablas para la suma y multiplicación que hagan de $R = \{0, 1, c, d\}$ un cuerpo de cuatro elementos.

3. (Ejemplos) Determinar si los siguientes conjuntos con las correspondientes operaciones son:

anillo	anillo conmutativo	anillo con unidad	dominio de integridad	anillo de división	cuerpo

a) $(\mathcal{C}([0,1]), +, \cdot)$, donde $\mathcal{C}([0,1]) := \{f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \text{ continua}\}$ y para $x \in [0,1]$ definimos las operaciones

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \qquad (f \cdot g)(x) = f(x)g(x).$$

b) $(M_n(A), +, \cdot)$ donde $(A, +, \cdot)$ es una anillo con unidad y las operaciones en $M_n(A)$ son las inducidas por las de A.

c) $(\mathbb{Z}[\sqrt{d}], +, \cdot)$, donde d es un entero libre de cuadrados, $\mathbb{Z}[\sqrt{d}] = \{a + b\sqrt{d} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ y las operaciones se definen como:

$$\begin{aligned} (a+b\sqrt{d}) \ + \ (a'+b'\sqrt{d}) &= (a+a') + (b+b')\sqrt{d}, \\ (a+b\sqrt{d}) \ \cdot \ (a'+b'\sqrt{d}) &= (aa'+bb'd) + (ab'+ba')\sqrt{d}. \end{aligned}$$

d) $(\mathbb{Q}[i], +, \cdot)$ donde $\mathbb{Q}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ y las operaciones son las inducidas de $\mathbb{C}$.

4. (Ejemplos) Decidir si los siguientes conjuntos son subanillos de $\mathbb{R}$:

$$R_1 = \{a + b\sqrt[2]{3} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}, \qquad R_2 = \{a + b\sqrt[3]{3} + c\sqrt[3]{9} \mid a, b, c \in \mathbb{Z}\}, \qquad R_3 = \{a + b\sqrt[3]{3} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}.$$

5. (Ejemplos) Definimos el conjunto $N = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \ : \ a, b \in \mathbb{R} \right\}$. Demostrar que N es un cuerpo con las operaciones suma y producto de matrices.

6. (Dominios y cuerpos) Sea A un anillo conmutativo con unidad. Supongamos que A es finito (i.e. $|A| < \infty$).

a) Demuestra que todo elemento no nulo de A es bien un elemento invertible, bien un divisor de cero.

b) Demuestra que si A es un dominio de integridad entonces es un cuerpo.

c) Decide de manera razonada si las afirmaciones anteriores son ciertas si no suponemos que A es finito.

7. (Divisores de cero) Calcula el número de divisores de cero del anillo $\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_{10}$.

8. (Invertibles) Calcula los elementos invertibles de los siguientes anillos:

$$\mathbb{Z}, \qquad \mathbb{Z}[i], \qquad \mathbb{Z}[\sqrt{-2}], \qquad \mathbb{Z}[\sqrt{-5}], \qquad \mathbb{Z}_n, \qquad \mathcal{M}_2(\mathbb{Q}), \qquad \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}), \qquad \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_4).$$

9. (Invertibles) Calcula algún elemento invertible de $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ distinto del 1.

10. (Ecuaciones)

a) ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación $2x = 4$ en $\mathbb{Z}_{12}$?

b) Demuestra que si R es un dominio de integridad, entonces la ecuación $ax = b$ con $a, b \in R$, $a \neq 0$ o bien no tiene solución, o bien tiene solución única.

c) Sea A un anillo y sea $a \in A$ un elemento tal que $a^2 = a$. Decide de manera razonada si necesariamente $a = 0$ o $a = 1$. *Sugerencia: Analiza el caso* $a = \overline{5} \in A = \mathbb{Z}_{20}$.

d) Encuentra todas las soluciones de la ecuación $x^2 - 5x + 6 = 0$ en $\mathbb{Z}_{12}$, en $\mathbb{Z}_7$, y en $\mathbb{Z}_2$.

e) Observa que el número de soluciones de $x^3 + x + 2 = 0$ en $\mathbb{Z}_7$ es distinto que en $\mathbb{Z}_5$.

f) Demostrar que la ecuación $x^6 + y^6 = 3z^6$ tiene solución única en números enteros (Ayuda: considerar primero esta ecuación sobre $\mathbb{Z}_7$).

11. (Característica) Sea A un anillo conmutativo con unidad. Se define la característica de A, $\mathrm{char}(A)$, como el mínimo n tal que $1 + \overset{n}{\cdots} + 1 = 0$. En caso de que no exista tal n, se dice que $\mathrm{char}(A) = 0$. Demostrar que si A es un dominio, entonces $\mathrm{char}(A) = 0$ o p un primo.

12. (Ideales) Sea $r \in \mathbb{R}$. Decidir si el conjunto $M_r = \{f \in \mathcal{C}([0,1]) \,|\, f(r) = 0\}$ es un ideal del anillo $\mathcal{C}([0,1])$.

13. (Ideales) Sean $a, b \in \mathbb{Z}$. Demuestra que $\langle\{a,b\}\rangle = a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = mcd(a,b)\mathbb{Z}$ y $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z} = mcm(a,b)\mathbb{Z}$.

14. (Ideales de $\mathbb{Z}$)

a) Demuestra que todo ideal en $\mathbb{Z}$ es principal. Es decir, todo ideal I de $\mathbb{Z}$ es de la forma $I = n\mathbb{Z}$ para algún $n \in \mathbb{Z}$.

b) Halla todos los ideales primos de $\mathbb{Z}$, e indica cuáles son maximales.

c) Demuestra que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ es un cuerpo si y sólo si n es primo.

15. (Ideales primos y maximales) Encuentra todos los ideales maximales en $\mathbb{Z}_8$, $\mathbb{Z}_{10}$, $\mathbb{Z}_n$.

16. (Anillos) Si A y B son dos anillos, probar que el producto cartesiano $A \times B$ también lo es con las operaciones obvias (componente a componente).

17. (Ideales primos y maximales) Sea $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ el anillo producto cartesiano de $\mathbb{Z}$ con $\mathbb{Z}$.
a) Demuestra que $\{(3x, y) : x, y \in \mathbb{Z}\}$ es un ideal maximal de A.

b) Demuestra que $\{(a, 0) : a \in \mathbb{Z}\}$ es un ideal primo pero no maximal en A.

18. (Anillo cociente) Sean los anillos $A_1 = \mathbb{Z}[\sqrt{3}] = \{a + b\sqrt{3} | a, b \in \mathbb{Z}\}$ y $A_2 = \mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} | a, b \in \mathbb{Z}\}$. Consideramos los anillos cociente $R_i = A_i/2A_i$. Para $i = 1, 2$, calcular:
a) el tamaño de R_i,

b) todos los subgrupos de R_i como grupo con la suma,

c) todos los ideales de R_i.

19. (Homomorfismos) Demuestra que $N = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \;:\; a, b \in \mathbb{R} \right\}$ es isomorfo a $\mathbb{C}$.

20. (Homomorfismos) ¿Son ciertos los siguientes isomorfismos de anillos?

$$\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}[i], \qquad \mathbb{Q}(\sqrt{-2}) \simeq \mathbb{Q}(\sqrt{2}), \qquad \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \simeq \mathbb{Q}(\sqrt{3}).$$

21. (Teorema de Isomorfía) Sea R un anillo e I y J ideales de R comaximales, es decir con $I + J = R$.

a) Demuestra el *Teorema Chino de los restos*: tenemos que $I \cap J = IJ$ y $R/IJ \cong R/I \times R/J$. *Sugerencia: aplica el teorema de isomorfía al homomorfismo natural* $f : R \to R/I \times R/J$.

b) Aplica dicho resultado para demostrar que existe solución $x, z \in \mathbb{Z}$ de la ecuación $x^4 + x + 1 = 11 \cdot 17z$.

c) Calcula α, β en $\mathbb{Z}_{11 \cdot 17}$ tales que $\alpha = 1 \pmod{11}$, $\alpha = 0 \pmod{17}$ y $\beta = 0 \pmod{11}$, $\beta = 1 \pmod{17}$. Úsalos para calcular una solución explícita a la ecuación de b).