ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS (12-12-2015)	Grado en Matemáticas Curso 2015-2016	Hoja A4

1. (Subgrupos) Demuestra que $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}_7) \lhd \mathrm{GL}(2,\mathbb{Z}_7)$ y que $\mathrm{GL}(2,\mathbb{Z}_7)/\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}_7) \cong \mathbb{Z}_7^\times$. Usa los subrupos de $\mathbb{Z}_7^\times$ para calcular los subgrupos de $\mathrm{GL}(2,\mathbb{Z}_5)$ que contienen a $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}_5)$.

2. (Subgrupos) Demuestra que $N = \langle g_{2\pi/8}^2 \rangle$ es un subgrupo normal de D_8 y que $D_8/N \cong D_2$. Usa los subgrupos de D_2 para calcular los subgrupos de D_8 que contienen a N.

3. (Subgrupos) Calcula el normalizador del subgrupo $\langle(1234)\rangle$. Calcula todos los subgrupos conjugados de $\langle(1234)\rangle$. Comprueba que el número de subgrupos conjugados es igual a 24 entre el tamaño del normalizador.

4. (Subgrupos) ¿Cuál es el centro de S_4? Calcula todos los subgrupos centralizadores de S_4. Calcula todos los subgrupos de orden 8 de S_4 sacándolos de la lista de centralizadores.

5. (Subgrupos) Tenemos $|S_6| = 16 * 9 * 5$. Calcula subgrupos de órdenes 5, 9 y 16 de S_6.

6. (Subgrupos) Demuestra que S_5 no tiene subgrupos de orden 30. *Sugerencia: Si tuviera un subgrupo H de orden 30, la acción en el cociente daría un homomorfismo de S_5 en S_4 de núcleo $N \leq H$.*

7. (Subgrupos) Demuestra que cualquier grupo G de orden 42 tiene algún subgrupo normal N de orden 7. Usa que $|G/N| = 6$ para demostrar que G tiene algún subgrupo de orden 21.

8. (Subgrupos) Sea T el subgrupo de $\mathrm{SL}(3,\mathbb{Z}_5)$ de matrices triangulares superiores con unos en la diagonal. Muestra que T tiene orden 125. Encuentra un subgrupo $Z \leq T$ de orden 5 calculando el centro de T.

9. (Abelianos) Demuestra que $C_9 \times C_3$ no es cíclico y halla el número de elementos de orden 9.

10. (Abelianos) ¿Para qué valores de $n \geq 2$ es D_n isomorfo a $C_n \times C_2$?

11. (Abelianos) En $C_{12} \times C_4 \times C_{15}$ encuentra un subgrupo de orden 9 y demuestra que no es cíclico.

12. (Abelianos) Demuestra que $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \simeq \mathbb{C}$. Demuestra que $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ no puede ser isomorfo a $\mathbb{C}^*$ con el producto. *Sugerencia: Busca elementos con orden finito en $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ y en $\mathbb{C}^*$.*

13. (Abelianos) Expresa $\mathbb{Z}_{35}^\times$ como producto de grupos cíclicos. Demuestra que su 2-subgrupo de Sylow no es cíclico.

14. (Abelianos) Halla cuántos grupos no isomorfos hay en la siguiente lista: C_{100}, $C_{25} \times C_4, C_4 \times C_6$, $C_2 \times C_{12}$, C_{24}, $C_4 \times C_{20}$, $C_4 \times C_5 \times C_5$.

15. (Abelianos) Demuestra que todo grupo abeliano de orden 45 contiene un elemento de orden 15. ¿Contiene necesariamente un elemento de orden 9?

16. (Abelianos) Sabemos que un grupo abeliano G de orden 120 tiene exactamente 3 elementos de orden 2. Expresa G como (isomorfo a) un producto de grupos cíclicos.

17. (Abelianos) Considera el grupo $G = \{\overline{1}, \overline{4}, \overline{11}, \overline{14}, \overline{16}, \overline{19}, \overline{26}, \overline{29}, \overline{31}, \overline{34}, \overline{41}, \overline{44}\}$ con la multiplicación módulo 45. Escribe G como (isomorfo a) un producto de grupos cíclicos.

18. (Clasificación) Sea p primo. Demuestra que todo automorfismo de $\mathbb{Z}_p$ y de $\mathbb{Z}_p^2$ es una aplicación lineal, y por tanto $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_p) = \mathrm{GL}(1,\mathbb{Z}_p)$ y $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_p^2) = \mathrm{GL}(2,\mathbb{Z}_p)$.

19. (Clasificación) Clasifica todos los grupos de orden 35 y 55.

20. (Clasificación) ¿Es cíclico todo grupo de orden 26?

21. (Clasificación) Demuestra que los únicos grupos de orden 18 con un subgrupo cíclico de orden 9 son C_{18} y D_9.

22. (Clasificación) Demuestra que todo grupo de orden 42, de orden 45 y de orden 110 es resoluble.

23. (Clasificación) Demuestra que todo grupo de orden 255 es cíclico.

24. (Clasificación) Demuestra que todo grupo de orden 99 o 175 es abeliano.

25. (Clasificación) Demuestra que todo grupo de orden 20 tiene un subgrupo de orden 10.