ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS	**Grado en Matemáticas**	**Hoja**
(02-11-2015)	**Curso 2015-2016**	**A3**

1. (Ciclos) Sean $\sigma_1, \dots, \sigma_s \in S_n$ ciclos disjuntos, y sea $\alpha = \sigma_1 \dots \sigma_s$. Demuestra que $|\alpha| = \text{m.c.m}(|\sigma_1|, \dots, |\sigma_s|)$.

2. (Ciclos) Calcula la permutación σ^{100}, donde $\sigma = (12)(345)(6789)$.

3. (Ciclos) La posición inicial de una baraja de cinco cartas es `ABCDE`. Repetimos una forma de barajar 17 veces y la baraja queda `DEBAC`. ¿Cuál es esa forma de barajar?

4. (Pares) Calcula cada uno de los siguientes productos y escríbelos como producto de transposiciones. Indica cuales de estas permutaciones son pares.

$$\sigma = (12)(23)(34)\,; \qquad \beta = (246)(357)(123)\,; \qquad \gamma = (1234)(234)(34)\,.$$

5. (Grupos de permutaciones) Sean $H = \langle(123)\rangle, K = \langle(45)\rangle < S_n$, $n \geq 5$. Demuestra que $H, K \ntriangleleft S_n$, pero $HK < S_n$.

6. (Pares) Haz toda la lista de los elementos de A_3 y A_4.

7. (Trasposiciones) Probar que S_n está generado por las $n-1$ transposiciones: $(1\,2), (1\,3), \dots, (1\,n)$.

8. (Conjugación) Usa los tamaños de las clases de conjugación para calcular los subgrupos normales de S_4.

9. (Simples) Sea G un grupo y $a \in G$. Denotamos por $C_G(a) = \{x \in G : xax^{-1} = a\}$ el centralizador de a en G.

a) Calcula $C_{A_5}((12345))$, $C_{A_5}((123))$ y $C_{A_5}((12)(34))$.

b) Usa la ecuación $|\text{cl}_G(a)| = |G|/|C_G(a)|$ para calcular los tamaños de las clases de elementos de A_5.

c) Demuestra usando el apartado anterior que A_5 no tiene subgrupos normales.

10. (Simples) Vamos a demostrar que si $n \geq 5$ el único subgrupo normal no trivial de S_n es A_n. Para ello es suficiente ver que si $N \triangleleft S_n$ entonces $N \supset A_n$. Sea $h \in N$ distinto de la identidad:

a) Observa que $(xy)^{-1}h(xy)h^{-1} = (yx)(h(x)h(y))$ debe estar en N para todo $x \neq y$.

b) Como $h \neq I$, podemos encontrar algún x tal que $h(x) \neq x$. Tomando ese x e $y \neq h(x)$, observa que $(yx)(h(x)h(y))$ es un 3-ciclo o el producto de dos trasposiciones disjuntas.

c) Muestra que si N tiene un 3-ciclo entonces $N \supset A_n$, y que si N tiene un producto de dos trasposiciones disjuntas, entonces debe contener a $(12)(34)$ y $(12)(45)$, y por tanto a su producto que es un 3-ciclo.

d) Concluye que $N \supset A_n$. Sabiendo que A_n es simple, usa dicho resultado para ver que S_n no es resoluble.

11. (Conjugación) Vamos a mirar a las clases de conjugación en A_n de las permutaciones más sencillas.

a) Demuestra que los 3-ciclos forman una clase de conjugación en A_n si $n \geq 5$ pero no si $n = 3, 4$. Usa eso para ver que si un subgrupo normal de A_n, $n \geq 5$, contiene un 3-ciclo, entonces es igual a A_n. Demuestra lo mismo si el subgrupo normal tiene un producto de dos 3-ciclos disjuntos.

b) Demuestra que los productos de dos 2-ciclos disjuntos forman una clase de conjugación en A_n si $n \geq 5$, y que esto también se cumple si $n = 4$. Usa eso para ver que si un subgrupo normal de A_n contiene un producto de dos 2-ciclos disjuntos entonces debe ser igual a A_n.

12. (Simples) Vamos a usar el ejercicio anterior para demostrar que A_n es simple si $n \geq 5$. Para ello vamos a proceder como hicimos con S_n. En este caso, usaremos que si $N \lhd A_n$ contiene un elemento $h \neq I$, entonces $f = (xyz)^{-1}h(xyz)h^{-1} = (zyx)(h(x)h(y)h(z))$ también está en N (con x, y, z distintos). Dividimos la situación fijándonos en la descomposición única de h en ciclos disjuntos (y de longitud mayor que 1):

a) Si h tiene al menos tres ciclos en su descomposición, tomando x, y, z en tres ciclos distintos, observa que f queda un producto de dos 3-ciclos disjuntos.

b) Si h tiene algún ciclo de longitud mayor que 3, digamos $(abcd\ldots)$, entonces tomando $x = a, y = b, z = c$ tenemos que $f = (cba)(bcd) = (acd)$ es un 3-ciclo.

c) Si no estamos en los casos de los dos apartados anteriores, observa que h debe ser un 3-ciclo, el producto de dos 3-ciclos disjuntos o el producto de dos 2-ciclos disjuntos.

d) Usando el problema anterior concluye que A_n es simple.

13. (Grupos de permutaciones) ¿Qué tamaño tiene el subgrupo de S_n generado por todos los 4-ciclos?

14. (Grupos de permutaciones) Usando el *in shuffle* y el *out shuffle* (ver Hoja A1), ¿podemos desordenar una baraja de 6 cartas de cualquier forma?

15. (Órbitas y estabilizadores) S_4 actua sobre el conjunto de polinomios en cuatro variables $p(t_1, t_2, t_3, t_4)$ con coeficientes enteros permutando las variables. Calcula la órbita y el estabilizador de cada uno de los siguientes polinomios: t_1, $t_1 + t_2$, $t_1 - t_2$, $(t_1 - t_2)^2$, $t_1 + 5t_2$, $t_1t_2 + t_3t_4$, $t_1t_2 - t_3t_4$, $\prod_{i<j}(t_i - t_j)$.

16. (Órbitas) Teniendo en cuenta que $g_\theta \in \mathrm{SO}(2, \mathbb{R})$, con g_θ el giro de ángulo θ, con $\cos\theta = -4/5$, $\operatorname{sen}\theta = 3/5$, es decir con matriz

$$g_\theta = \begin{pmatrix} -4/5 & -3/5 \\ 3/5 & -4/5 \end{pmatrix},$$

observa que

a) $G = \langle g_\theta \rangle$ actua sobre el conjunto $X_\mathbb{Q} = \{(x, y) \in \mathbb{Q}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$. Calcula algunos puntos en la órbita del punto $(1, 0)$.

b) podemos construir tres matrices A, B, C de $\mathrm{SO}(3, \mathbb{R})$ correspondientes a ese giro con respecto a los ejes x, y, z. Demuestra que $H = \langle A, B, C \rangle$ actua sobre el conjunto de puntos $(x, y, z) \in \mathbb{Q}^3$ que son soluciones de la ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 101$. Encuentra algún punto en $\mathrm{Orb}_H((10, 1, 0))$ de coordenadas enteras distinto de $(10, 1, 0)$.

c) podemos ver G como un subgrupo de $\mathrm{SO}(2, \mathbb{Z}_7)$. Así, G actua sobre $X = \mathbb{Z}_7^2$. Calcula la descomposición en órbitas de X bajo esta acción y el estabilizador del punto $(\overline{1}, \overline{0})$. ¿Es una acción transitiva?

17. (Acciones) Sea $H = \{\sigma \in S_n \mid \sigma(n) = n\} \leq S_n$. Si $\sigma \in H$, definimos $\hat{\sigma} \in S_{n-1}$ por $\hat{\sigma}(i) = \sigma(i)$ para $1 \leq i \leq n - 1$. Probar que esta aplicación es un isomorfismo de grupos $H \to S_{n-1}$.

18. (Acciones) Consideramos los elementos $\sigma = (1\,2\ldots n)$ y $\gamma = (2\,n)(3\,n-1)\cdots$ de S_n. Probar que $\langle \sigma, \gamma \rangle \cong D_{2n}$.

19. (Acciones) Encuentra una acción fiel de D_{10} en S_7, y calcula las permutaciones que corresponden a $g_{2\pi/10}$ y r_0 bajo dicha acción. ¿Podemos encontrar una acción fiel de D_5 en S_4?

20. (Acciones) Sea $K = \mathbb{C}, \mathbb{R}$ o $\mathbb{Z}_p$, p impar. Demuestra que $\mathrm{SL}(2, \mathbb{K})$ actua sobre el conjunto proyectivo $X = K \cup \{\infty\}$ con enviando $z \in X$ a

$$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d},$$

donde se entiende que si $c \neq 0$ entonces $\infty \mapsto a/c$ y $\infty \mapsto \infty$ en otro caso, y además $z \mapsto \infty$ si $cz + d = 0$.

a) Observa que dicha acción no es fiel, pero da lugar a una acción fiel del grupo $\mathrm{PSL}(2, K)$.

b) El apartado anterior nos dice que tenemos un encaje $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z}_3) \hookrightarrow S_4$. Identifica el subgrupo de S_3 al que va a parar $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z}_3)$ y calcula el orden de

$$z \mapsto \frac{\overline{2}z + \overline{1}}{z + \overline{1}}$$

viéndola como un producto de ciclos en S_4.

21. (Acciones) Demuestra que el grupo de isometrías propias (de determinante 1) del cubo es isomorfo a S_4 mirando a la acción de dicho grupo sobre las diagonales del cubo. ¿A qué permutación corresponde el giro de ángulo π y eje z?

22. (Acciones) Calcula la acción regular de forma explícita (hallando a qué permutación de S_n va cada elemento) para los siguientes grupos: $\mathbb{Z}_{15}^{\times}$, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$, D_3, $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}_2)$, $\mathrm{O}(2, \mathbb{Z}_3)$. Haz lo mismo para las acciones inducidas en los cocientes por subgrupos no triviales, indicando en cada caso a qué subgrupos normales dan lugar.

23. (Acciones) Considera el grupo $\mathrm{Aff}(\mathbb{Z}_p)$ de *transformaciones afines* de $\mathbb{Z}_p$, que son las permutaciones de $\mathbb{Z}_p$ dadas por $f_{a,b}(z) = az + b$ con $a \in \mathbb{Z}_p^{\times}$, $b \in \mathbb{Z}_p$.

a) Demuestra que $\mathrm{Aff}(\mathbb{Z}_p)$ es un subgrupo de $\mathrm{Sym}(\mathbb{Z}_p) \cong S_p$. ¿Cuál es su tamaño?

b) Calcula generadores de $G = \mathrm{Aff}(\mathbb{Z}_5)$ visto como subgrupo de S_5.

c) Considera la acción de G en S_4 proveniente de la acción de G en G/H con H el subgrupo de traslaciones $z \mapsto z + b$ de G. ¿A qué subgrupo normal de G da lugar dicha acción?