1) (2,5 puntos) La evolución de una población viene descrita por la matriz de transición:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1,4 & 0,5 \\ 0,6 & 0 & 0 \\ 0 & 0,75 & 0,2 \end{pmatrix}$$

(a) (0,6 puntos) Explicar el significado biológico de las 9 componentes de la matriz.
(b) (0,6 puntos) Conocido el dato inicial $(X_0, Y_0, Z_0) = (12, 10, 5)$**, hallar la población en los instantes 1 y 2.**
(c) (0,6 puntos) Usando un programa de cálculo, obtenemos que $\lim_{N\to\infty} X_N/X_{N-1} = 1,051$**. Explicar el significado biológico de este límite, y su relación con la matriz de transición del sistema.**
(d) (0,7 puntos) Si el mismo programa de cálculo nos dice que para N muy grande la población consta de un $48,2\,\%$ **en la primera clase de edad, un** $27,5\,\%$ **en la segunda y un** $24,3\,\%$ **en la tercera, ¿qué relación tiene el vector** $(0,482;\ 0,275;\ 0,243)$ **con la matriz de transición?**

Solución: (a) La matriz del enunciado, que llamaremos M, es una matriz $3x3$, por lo tanto se trata de una población dividida en tres grupos de edad. Denotemos a estos por X, Y, Z y por X_n, Y_n, Z_n el número de individuos de cada grupo en una determinada unidad de tiempo n. Así, si denotamos por m_{ij} el elemento de la matriz en la fila i y columna j. Se tiene:

- En la primera fila aparece la información de la fecundidad de la población: el coeficiente $m_{11} = 0$ quiere decir que el grupo X no procrea. El coeficiente $m_{12} = 1,4$ (resp. $m_{13} = 0,5$) indica que por cada individuo del grupo Y (resp. Z) de media nacen $1,4$ (resp. $0,5$) por unidad de tiempo.
- En la segunda fila aparecen los datos de supervivencia de los individuos del grupo X que pasan al grupo de edad Y en una unidad de tiempo. En este caso $m_{13} = 0,6$, indicando que el $60\,\%$ de los individuos del grupo X pasan a formar parte del grupo Y cuando transcurre una unidad de tiempo. Los coeficientes $m_{22} = m_{23} = 0$, ya que en una unidad de tiempo los grupos Y y Z no pueden pasar al grupo Y.
- En la última fila aparecen los datos de supervivencia de los dos últimos grupos: Y y Z. Se tiene $m_{31} = 0$ ya que transcurrido una unidad de tiempo los individuos del grupo X no pueden pasar a formar parte del grupo Z. El coeficiente $m_{32} = 0,75$ indica que en una unidad de tiempo el $75\,\%$ de los individuos del grupo de edad Y sobreviven y pasan a formar parte del grupo de edad Z, mientras que el coeficiente $m_{33} = 0,2$ indica que el $20\,\%$ del grupo Z sobreviven.

(b) Se tiene

$$\begin{pmatrix} X_n \\ Y_n \\ Z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1,4 & 0,5 \\ 0,6 & 0 & 0 \\ 0 & 0,75 & 0,2 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{pmatrix}$$

Así tenemos que en el instante 1 e instante 2 tenemos:

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1,4 & 0,5 \\ 0,6 & 0 & 0 \\ 0 & 0,75 & 0,2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16,5 \\ 7,2 \\ 8,5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1,4 & 0,5 \\ 0,6 & 0 & 0 \\ 0 & 0,75 & 0,2 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 12 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14,33 \\ 9,9 \\ 7,1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, transcurrida la primera unidad de tiempo tenemos 32,2 $(= 16,5 + 7,2 + 8,5)$ individuos; mientras que transcurridas dos unidades de tiempo tendremos 31,33 $(= 14,33 + 9,9 + 7,1)$ individuos.
(c) Tenemos $\lim_{N\to\infty} X_N/X_{N-1} = 1,051$, esto indica que el autovalor dominante de la matriz M es $\lambda_D = 1,051$. Biológicamente quiere decir que la población crece un $5,1\,\%$ en cada unidad de tiempo, ya que $0,051 = \lambda_D - 1$.
(d) El vector $(0,482;\ 0,275;\ 0,243)$ es el autovector normalizado de autovalor $\lambda_D = 1,051$ de la matriz M.

2) (2,5 puntos) Un país está dividido en dos zonas geográficas: Norte y Sur. Se observa que cada año un 20 % de la población del Norte emigra al Sur, mientras que un 40 % de la poblacion del Sur emigra al Norte.
(a) (0,5 puntos) Formular un sistema para describir la evolución de esta población.
(b) (1 punto) Determinar el porcentaje de cada población que residiría en cada región a largo plazo.
(c) (1 punto) El gobierno del país decide que, a largo plazo, un 50 % de la población debe vivir en el Sur. Para ello debe limitar la emigración de sureños a un porcentaje α % cada año. ¿Cuál debe ser el valor de α?

Solución:
(a) Denotemos por N_n (resp. S_n) el porcentaje de la población que vive en el Norte (resp. Sur) en el año n. Así obtenemos:

$$\left\{\begin{array}{l} N_{n+1} = 0{,}8N_n + 0{,}4S_n \\ S_{n+1} = 0{,}2N_n + 0{,}6S_n \end{array}\right. \Longrightarrow \begin{pmatrix} N_{n+1} \\ S_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_n \\ S_n \end{pmatrix}.$$

(b) Vamos a calcular los autovalores de la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}6 \end{pmatrix} \Longrightarrow |M - xI_2| = \begin{vmatrix} 0{,}8 - x & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}6 - x \end{vmatrix} = x^2 - 1{,}4x + 0{,}4 = (x-1)(x-0{,}4).$$

Por lo tanto, los autovalores son 0,4 y 1, el autovalor dominante es $\lambda_D = 1$. Para calcular el porcentaje población que residiría en cada región a largo plazo hemos de calcular el autovector correspondiente al autovalor dominante y normalizarlo:

$$\begin{pmatrix} 0{,}8 - 1 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}6 - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow 0,2x - 0,4y = 0 \Longleftrightarrow x = 2y \Longleftrightarrow (x,y) = (2,1).$$

Por lo tanto deducimos que a largo plazo habrá el doble de población en el Norte que en el Sur.
(c) En este caso la matriz de evolución del nuevo sistema de dinámica de poblaciones es:

$$M_\alpha = \begin{pmatrix} 0{,}8 & \alpha \\ 0{,}2 & 1-\alpha \end{pmatrix} \Longrightarrow |M_\alpha - xI_2| = \begin{vmatrix} 0{,}8 - x & \alpha \\ 0{,}2 & 1 - \alpha - x \end{vmatrix} = (x-1)(x+\alpha-0{,}8).$$

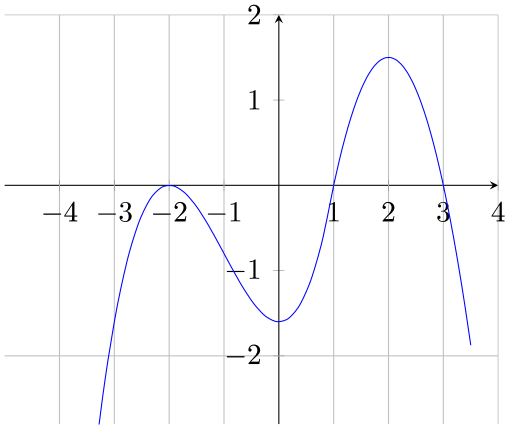
Los autovalores de la matriz M_α son 1 y $0{,}8 - \alpha$. Como $0 \leq \alpha \leq 1$, se tiene que el autovalor dominante vuelve a ser $\lambda_D = 1$. Calculando el autovector correspondiente al autovalor dominante tenemos

$$\begin{pmatrix} 0{,}8 - 1 & \alpha \\ 0{,}2 & 1 - \alpha - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow 0,2x - \alpha y = 0 \Longleftrightarrow x = \frac{\alpha}{0,2} y.$$

Como el gobierno quiere que haya el mismo porcentaje en el Norte que en el Sur, la coordenadas del autovector calculado tienen que coincidir. Por lo tanto, $\alpha = 0,20$. Es decir, que emigrarán un 20 % de la población del Sur al Norte.

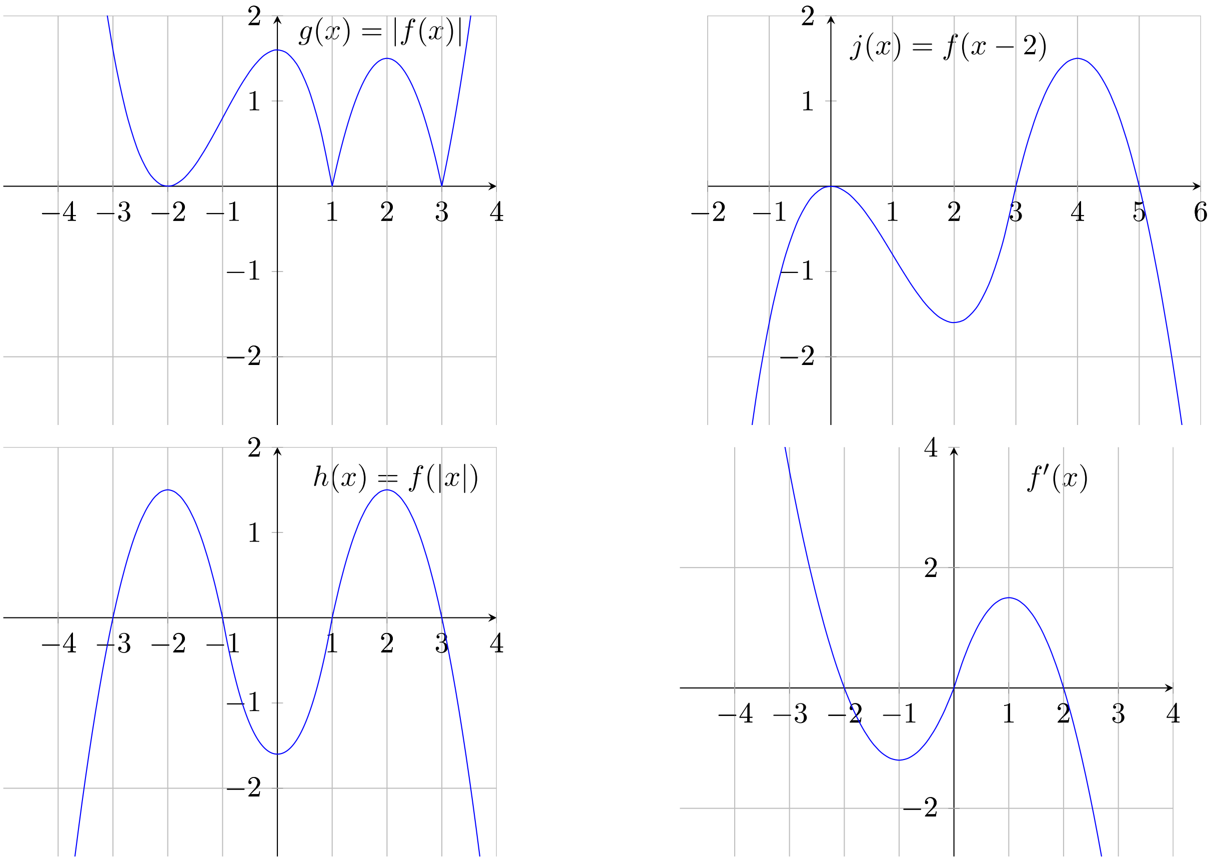
3) (2,5 puntos)

La gráfica de cierta función f viene dada por la siguiente figura:



Basándote en la gráfica de f, responde a las siguientes cuestiones.
a) (1,25 puntos) Dibujar la gráficas de las funciones :
$g(x) = |f(x)|$, $h(x) = f(|x|)$, **y** $j(x) = f(x - 2)$.
b) (1,25 puntos) Dibujar razonadamente la gráfica aproximada de la función derivada $f'(x)$.

Solución: Las gráficas que se piden son las siguientes:



Para dibujar la gráfica de $f'(x)$ hay que tener en cuenta los siguientes propiedades:

- $f'(x) > 0 \iff f(x)$ creciente $\iff x \in (-\infty, -2) \cup (0, 2)$.
- $f'(x_0) = 0 \iff x_0$ es un punto crítico de $f(x) \iff x_0 = -2, 0, 2$.
- x_0 es un mínimo o máximo local de $f'(x) \iff f''(x_0) = 0 \iff x_0$ es un punto de inflexión de $f(x)$ $\iff x_0 = -1, 1$.

4) (2,5 puntos) Se comienza a medir la concentración de contaminante de un lago el 1 de enero de 2015, y después de varias mediciones se comprueba que sigue aproximadamente la fórmula

$$c(t) = (t+1)e^{-0{,}02(t+1)}\,, \quad t > 0,$$

donde t es el tiempo en meses y $c(t)$ se mide en mgr/m^3.
(a) (0,5 puntos) ¿Cuál será la concentración a largo plazo?
(b) (1 punto) ¿Cuándo se alcanza la máxima concentración de contaminante y cuánto es esta cantidad?
(c) (1 punto) Dibuja la gráfica de $c(t)$ para $t > 0$ indicando su concavidad y los puntos de inflexión.

Solución:
(a) Lo que se esta preguntado es sobre el límite de la función $c(t)$ (la concentración) cuando t tiende a infinito (es decir, a largo plazo):

$$\lim_{t\to\infty} c(t) = \lim_{t\to\infty} (t+1)e^{-0{,}02(t+1)} = \lim_{t\to\infty} \frac{(t+1)}{e^{0{,}02(t+1)}}.$$

Este límite es del tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Aplicamos L'Hopital obteniendo

$$\lim_{t\to\infty} c(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{(t+1)}{e^{0{,}02(t+1)}} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{0,02e^{0{,}02(t+1)}} = 0.$$

(b) Vamos a calcular cuando se alcanza el máximo de $c(t)$. Para ello en primer lugar calculamos para que valores de t su primera derivada se anula:

$$c'(t) = \frac{49-t}{50}e^{-0{,}02(t+1)} = 0 \iff t = 49.$$

Para ver si es un máximo o mínimo calculamos la segunda derivada de $c(t)$ y la evaluamos en el punto crítico $t = 49$:

$$c''(t) = \frac{t-99}{2500}e^{-0{,}02(t+1)} \Longrightarrow c''(49) < 0.$$

Por lo tanto, el máximo de $c(t)$ se alcanza en $c(49) = 50/e$.
(c) Vamos a utilizar $c'(t)$ y $c''(t)$ para dibujar la gráfica de $c(t)$. Se tiene

$$c(t) \text{ creciente} \iff c'(t) > 0 \iff t < 49.$$

Para estudiar la concavidad necesitamos calcular $c''(t) = 0$, es decir, $t = 99$. Así $t = 99$ es un punto de inflexión donde cambia la concavidad. Por lo tanto la gráfica de $c(t)$ es de la forma: