MATEMÁTICAS | PRIMERO DE BIOLÓGICAS | Curso 2015-2016

Hoja 7: Funciones de dos variables

1.- Identificar las curvas siguientes, indicando sus elementos principales:

a) $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 9 = 0.$

b) $2x^2 - y^2 + 4x + 4y - 3 = 0.$

c) $x^2 - 4x + 4y^2 = 0.$

d) $y^2 - 3x + 4y + 4 = 0.$

2.- Dibujar la gráfica de las siguientes funciones:

a) $f(x, y) = x^2 + 2y^2.$

b) $f(x, y) = -4x^2 - y^2 + 4.$

c) $f(x, y) = x^2 - 2x + 4y^2 - 1.$

d) $f(x, y) = x^2 - 2y^2.$

e) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}.$

f) $f(x, y) = \sqrt{16 - 4x^2 - y^2}.$

3.- Dibujar las curvas de nivel de las funciones dadas para los valores de c indicados:

a) $f(x, y) = x^2 + 3(y + 2)^2, \quad c = 1, 3, 5.$

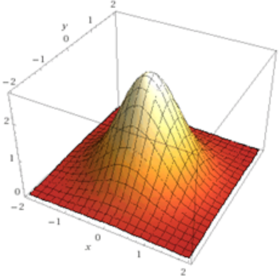
b) $f(x, y) = -x^2 + 2x - y^2 + 2y + 2, \quad c = -2, -1, 0, 1, 2.$

c) $f(x, y) = -x^2 + y^2 - 4y + 4, \quad c = -4, -2, 0, 2, 4.$

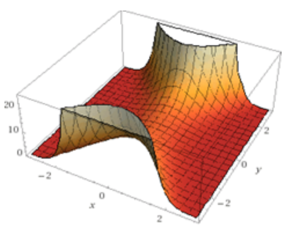
d) $f(x, y) = x + y - 1, \quad c = -2, -1, 0, 1, 2.$

4.- (Larson-Hostetler-Edwards, Cálculo, Vol. 2, Sexta Edición, McGrawHill, 1998; Ejercicios 45-48, Sección 12.1) Asociar cada una de las superficies dadas a una de las curvas de nivel indicadas:

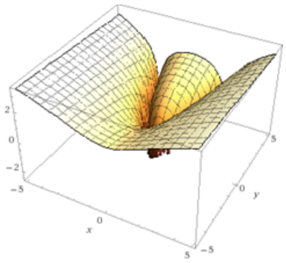
1) $z = e^{1-x^2-y^2}$,



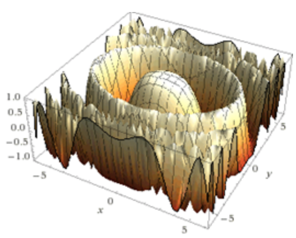
2) $z = e^{1-x^2+0,5y^2}$,



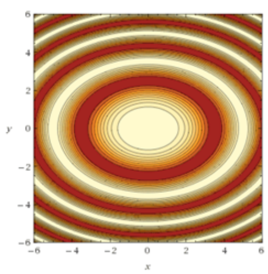
3) $z = \ln|y - x^2|$.



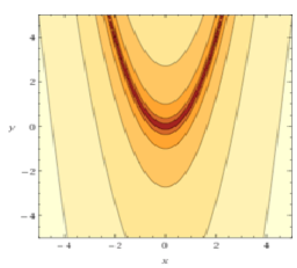
4) $z = \cos(\dfrac{x^2 + 2y^2}{4})$,



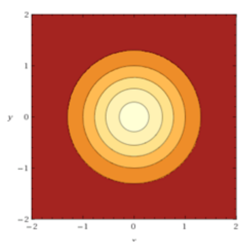
a)



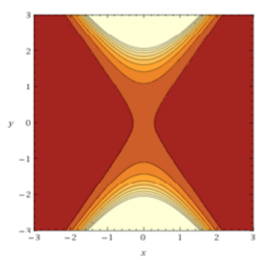
b)



c)

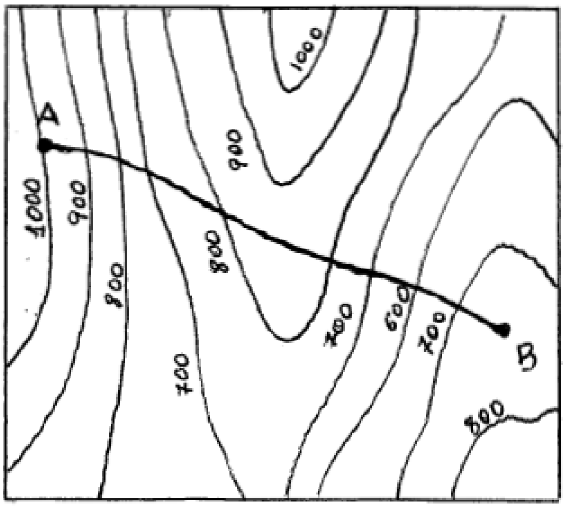


d)



5.- (Larson-Hostetler-Edwards, Cálculo, Vol. 2, Sexta Edición, McGrawHill, 1998; Ejercicio 71, Sección 12.1) **Distribución de temperaturas**. La temperatura en grados Celsius en cualquier punto (x, y) de una placa circular de 10 m de radio es $T = 600 - 0{,}75x^2 - 0{,}75y^2$, donde x e y se miden en metros. Dibujar las curvas isotermas para temperaturas de 100, 200 y 300 grados centígrados.

6.- A partir del siguiente mapa topográfico dibujar el perfil aproximado de la carretera que va desde A hasta B:



7.- (Larson-Hostetler-Edwards, Cálculo, Vol. 2, Sexta Edición, McGrawHill, 1998; Ejercicio 75, página 1115) **Ley de los gases ideales**. La ley de los gases ideales establece que $PV = kT$, siendo P la presión, V el volumen, T la temperatura y k una constante de proporcionalidad. Un depósito contiene 2400 cm^3 de nitrógeno a una presión de 10 Kg/cm^2 y a una temperatura de 300 grados Kelvin.

a) Determinar k.

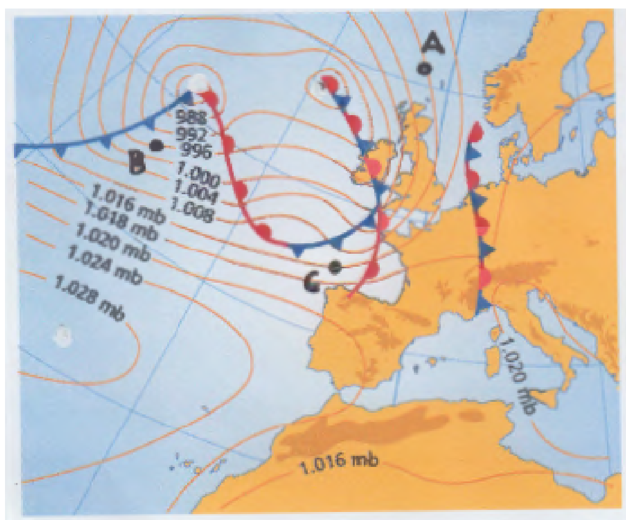
b) Describir las curvas de nivel de T para temperaturas de 240, 270 y 300 grados Kelvin.

8.- (Tomado de J. Rogawski, Cálculo, Varias variables, Segunda Edición, Reverté, 2012; Ejercicio 39, página 791) Con referencia a la figura de la derecha:

a) ¿ En cuál de los puntos A, B o C aumenta la presión en la dirección sur ?

b) ¿ En cuál de los puntos A, B o C disminuye la presión en la dirección oeste ?

c) ¿ En qué dirección en C aumenta la presión más ráapidamente ?



9.- La fórmula que se usa desde el año 2001 para obtener la temperatura aparente F del ser humano (en grados C) en función de la temperatura atmosférica T (en grados C) y de la velocidad del viento V (en kilómetros por hora) es:

$$F = 13{,}12 + 0{,}6215T - 11{,}37V^{0{,}16} + 0{,}3965TV^{0{,}16}.$$

Esta fórmula es válida para $5 \leq V \leq 50$ y $-20 \leq T \leq 10$.

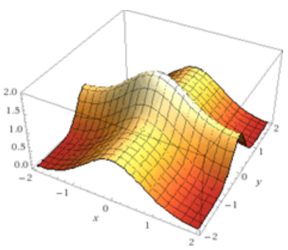
a) Hallar la temperatura aparente cuando la temperatura atmosférica es 4 grados C y la velocidad del viento es 20 km/h.

b) Si la velocidad del viento es 10 km/h, hallar la temperatura atmosférica que produce una temperatura aparente de 0 grados C.

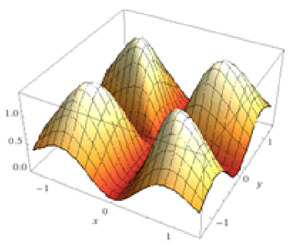
c) Dibujar las curvas de nivel para $F = 0, -5, -10$ grados C en un diagrama $V - T$ adecuado (ayúdate de un programa para representar funciones).

10.- (Tomado de E. Swokowski, Calculus, 5 Edition, PWS-KENT Publishing Company, 1991; Ejercicios 29 – 34, páginas 802 – 803) Asociar cada una de las siguientes superficies con una de las curvas de nivel indicadas:

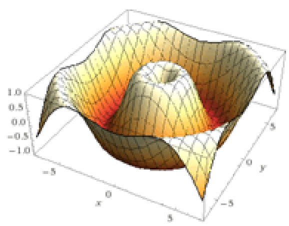
a)



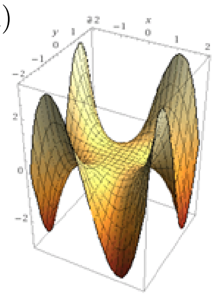
b)



c)



d)

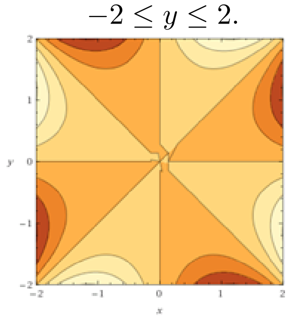


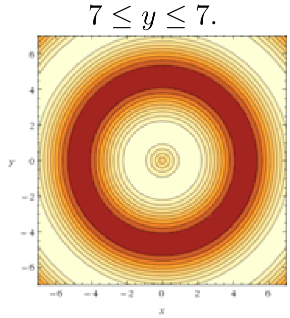
1) $z = \dfrac{xy^3 - x^3y}{2}$, $-2 \leq x \leq 2$, $-2 \leq y \leq 2$.

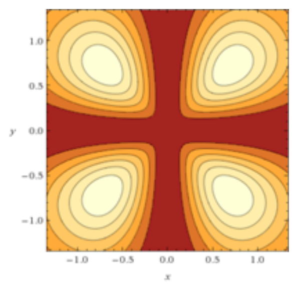
2) $z = \operatorname{sen}\sqrt{x^2 + y^2}$, $-7 \leq x \leq 7$, $7 \leq y \leq 7$.

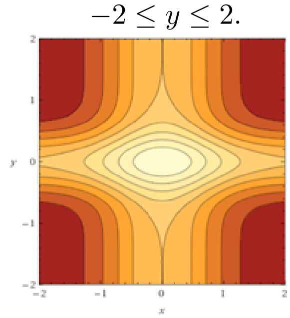
3) $z = \dfrac{15x^2y^2e^{-x^2-y^2}}{x^2 + y^2}$.

4) $z = e^{-x^2} + e^{-4y^2}$, $-2 \leq x \leq 2$, $-2 \leq y \leq 2$.









11.- Calcula las derivadas parciales:

1. $f(x, y) = x^2 - y$.
2. $f(x, y) = 3x^2 - xy + y$.
3. $f(x, y) = x^2e^{-y}$.

12.- Dada la función $f(x,y) = x^3 + x^2y^3 - y$, se pide:

a) Calcular
$$\frac{\partial f}{\partial y}(2,3)$$

b) Si estamos situados en el punto $(x,y) = (2,3)$, determinar en qué dirección debemos movernos para que la función f **disminuya** lo más rápidamente posible.

c) Si partimos del punto $(2,3)$ y nos movemos en dirección Norte, nos encontramos una pendiente hacia arriba o hacia abajo?

13.- Si nos encontramos en el punto $(-1,-1)$ de un lugar cuyo perfil viene dado por $f(x,y) = x^2e^y + xy$ y miramos en la dirección del eje x positivo: ¿vemos una cuesta hacia arriba o hacia abajo? Y si miramos en la dirección del eje y negativo? De todas las direcciones (360 grados) en las que podemos mirar a nuestro alrededor, en cuál de ellas se divisa una cuesta abajo más pronunciada cerca de nosotros?

14.- Supongamos que el rendimiento de un depósito bancario viene dado por $x^2y + y^3$ donde x es la inversión realizada en deuda pública griega e y la inversión realizada en deuda pública portuguesa. Si la inversión realizada es $x = 1, y = 1$ (miles de millones de euros), y se tienen 3 (miles de millones de euros) más para invertir, cómo debe hacerse para mejorar la rentabilidad lo más posible?

15.- Halla y clasifica los puntos críticos de las siguientes funciones.

1. $f(x,y) = x^2 + y^2 - 4x + 2y + 5$.
2. $f(x,y) = xy^2 + 2x^2y - 6xy$.
3. $f(x,y) = 3y^2 + 4x^2 - 4xy + 2y + 4x$.
4. $f(x,y) = \frac{3}{5}x^5 - 3xy^2 + 3y$.

16.- Para guardar muestras, necesitamos cajas de cartón, como las de zapatos, pero con la tapa de plástico. Cada cm^2 de cartón cuesta un céntimo de euro y cada cm^2 de plástico cuesta tres céntimos. Las cajas deben tener un volumen de 2000 cm^3. ¿Cuáles son las dimensiones de la caja más barata posible?

17.- Se pretende excavar un agujero cilíndrico en el suelo para que contenga un recipiente de residuos orgánicos de $1\,m^3$ de volumen. El coste de la excavación es proporcional a $A(1+p^2)$, siendo p la profundidad y A el área (circular) excavada.
Halla los valores de r y p que dan el coste mínimo, siendo r el radio del área circular.

18.- Se desea construir una balsa para lodos con forma de paralelepípedo rectángulo y con un volumen de 1 Hm^3. ¿Qué dimensiones debe tener para que la suma de la superficie lateral más la superficie del fondo (que son las que van recubiertas) sea mímima?

19.- La maquinaria recién adquirida por una fábrica de conservas para embalar sus productos permite fabricar cajas siempre que la suma de su longitud, altura y profundidad sea de exactamente 1 metro. Encuentra las dimensiones de la caja de volumen máximo que podrán fabricar.

20.- Determina y clasifica los puntos críticos de la función $f(x,y) = \dfrac{x^2-1}{y^2+1}$