Ejercicio 1	Ejercicio 2	Ejercicio 3	Ejercicio 4	Ejercicio 5	TOTAL
10 puntos	10 puntos	10 puntos	10 puntos	10 puntos	**50**

Universidad Autónoma de Madrid

Facultad de Ciencias.

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS.

Matemáticas. Primer curso de Biología.

Junio de 2016.

Grupo

Apellidos:.................................... Nombre: .... D.N.I.:..................

1) Una función muy utilizada para representar el tamaño de la población de un cultivo de bacterias a lo largo del tiempo es la función:

$$y = f(t) = \frac{k}{1 + ae^{-bt}}, \qquad \text{para } t > 0 \qquad (a, k, b > 0).$$

(a) (3 puntos) Representar la función $y = \frac{100}{1+5e^{-t}}$, para $t > 0$.

(b) (4 puntos) Hallar el instante en que la velocidad de crecimiento de la función $y = \frac{100}{1+5e^{-t}}$ es máxima.

(c) (3 puntos) ¿En qué tamaño tiende a estabilizarse la población cuando $t \to \infty$?

2) En un bosque de pinos los árboles están clasificados en tres tamaños: pequeños, medianos y grandes. Cada año un 60 % de los árboles pequeños pasan a ser medianos, mientras que el 40 % restante no crecen y se mantienen pequeños. Además, el 40 % de los árboles medianos pasan a ser grandes, mientras que el 60 % restante no crecen y se mantienen medianos. Cada año se cortan un 10 % de los árboles grandes para ventas en Navidad, a la vez que se repuebla con el mismo número de árboles cortados, pero de tamaño pequeño.
(a) (4 puntos) Escribir la matriz de transición de este sistema.
(b) (6 puntos) Si se comienza la explotación forestal plantando 500 árboles pequeños, ¿cuántos árboles habrá de cada tamaño con el paso del tiempo? (Nota: Usa que $\lambda = 1$ es el autovalor dominante; no es necesario que calcules los autovalores de la matriz de transición.)

3) Sea D la región de $\mathbb{R}^2$ acotada comprendida entre las gráficas de las funciones

$$f(x) = x - 2, \; g(x) = \frac{1}{1 + (x-3)^2}$$

y las rectas $y = 0$, $x = 4$.
(a) (2 puntos) Dibuja la función $y = \frac{1}{1+x^2}$.
(a) (2 puntos) Dibuja la región D.
(b) (3 puntos) Calcula el valor exacto del área de la región D.
(c) (3 puntos) Calcula el valor aproximado del área de D utilizando la regla del trapecio con 4 subintervalos iguales.

4) La velocidad de variación de una población de microorganismos con recursos limitados viene dada por la ecuación

$$\frac{dx}{dt} = -2(x-5),$$

donde $x(t)$ es el "número de microorganismos (en millones)" en el instante t, y t es el "tiempo transcurrido (en horas)". Inicialmente hay una cantidad $x(0) = 1$ millón de microorganismos.

(a) (6 puntos) Hallar la función que expresa x en función de t, resolviendo la ecuación diferencial.

(b) (4 puntos) ¿Cuántos microorganismos habrá al cabo de 2 horas? ¿Cuántos habrá a largo plazo?

5) Dada la función $f(x,y) = x^2 + x^3y^2 - y^2$, se pide:
(a) (3 puntos) Calcular

$$\frac{\partial f}{\partial y}(2,1)$$

(b) (4 puntos) Si estamos situados en el punto $(x,y) = (2,1)$, determinar en qué dirección debemos movernos para que la función f **aumente** lo más rápidamente posible.
(c) (3 puntos) Si partimos del punto $(2,1)$ y nos movemos en dirección Sur, ¿nos encontramos una pendiente hacia arriba o hacia abajo?