1) Sea $f(x)$ una función continua y derivable de la que conocemos los siguientes datos:

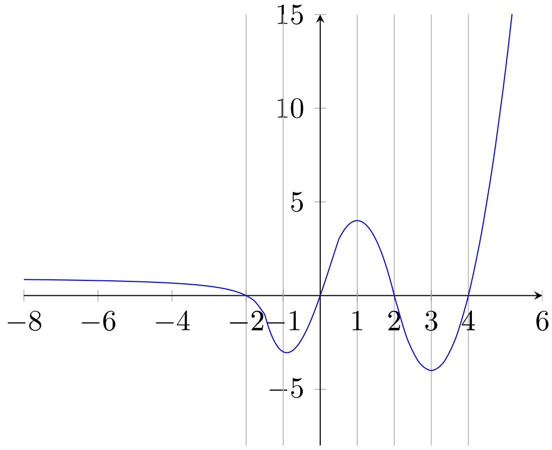
- $f(-2) = f(0) = f(2) = f(4) = 0$.
- $f'(x) > 0$ **para todo** $x \in (-1,1) \cup (3,+\infty)$.
- $f'(x) < 0$ **para todo** $x \in (-\infty,-1) \cup (1,3)$.
- $f''(x) > 0$ **para todo** $x \in (-3/2,1/2) \cup (2,+\infty)$.
- $f''(x) < 0$ **para todo** $x \in (-\infty,-3/2) \cup (1/2,2)$.
- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Según los datos anteriores, se pide:
a) Esbozar la gráfica de f, indicando razonadamente los intervalos de crecimiento y decrecimiento, concavidad, y si f tiene asíntotas horizontales o verticales.
b) Determinar razonadamente los máximos o mínimos locales de f, y justificar si alguno de ellos es máximo o mínimo absoluto.

Solución: Para dibujar la gráfica de $f(x)$ hay que tener en cuenta los siguientes propiedades:

- $f(x)$ creciente $\Longleftrightarrow f'(x) > 0 \Longleftrightarrow x \in (-1,1) \cup (3,+\infty)$.
- $f(x)$ decreciente $\Longleftrightarrow f'(x) < 0 \Longleftrightarrow x \in (-\infty,-1) \cup (1,3)$.
- $f(x)$ cóncava hacia arriba $\Longleftrightarrow f''(x) > 0 \Longleftrightarrow x \in (-3/2,1/2) \cup (2,+\infty)$.
- $f(x)$ cóncava hacia abajo $\Longleftrightarrow f''(x) < 0 \Longleftrightarrow x \in (-\infty,-3/2) \cup (1/2,2)$.
- x_0 es un máximo local de $f(x) \Longleftrightarrow f(x) \le f(x_0)$ para x cercano de $x_0 \Longleftrightarrow f(x)$ pasa de creciente para valores cercanos menores que x_0 a decreciente para valores cercanos mayores que $x_0 \Longleftrightarrow x_0 = 1$.
- x_0 es un mínimo local de $f(x) \Longleftrightarrow f(x) \ge f(x_0)$ para x cercano de $x_0 \Longleftrightarrow f(x)$ pasa de decreciente para valores cercanos menores que x_0 a creciente para valores cercanos mayores que x_0 $\Longleftrightarrow x_0 \in \{-1,3\}$.
- $f(x)$ tiene una asíntota vertical en la recta $x = x_0$ si $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$ o $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$. En nuestro caso como nuestra función es continua y los datos que nos dan tenemos que $f(x)$ no tiene asíntotas verticales.
- $f(x)$ tiene una asíntota horizontal en la recta $y = y_0$ si $\lim_{x\to\infty} f(x) = y_0$ o $\lim_{x\to-\infty} f(x) = y_0$. En nuestro caso como $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$, tenemos que $f(x)$ tiene una asíntota horizontal en $y = 1$.

Por lo tanto un esbozo de la gráfica de la función $f(x)$ es:



Por último estudiemos los máximos y mínimos absolutos. Obsérvese que los valores de $f(-1)$, $f(1)$ y $f(3)$ están puestos de forma aleatoria, ya que no se especifica en los datos del enunciado.

- Máximos absolutos: No hay ya que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
- Mínimos absolutos:
  - $f(x)$ tendrá un mínimo absoluto en $x = -1$ si $f(-1) \le f(3)$.
  - $f(x)$ tendrá un mínimo absoluto en $x = 3$ si $f(-1) \ge f(3)$.
  - $f(x)$ tendrá un mínimo absoluto en $x = -1$ y $x = 3$ si $f(-1) = f(3)$.

2) Una parcela de estudio contiene N plantas, cada una de las cuales produce semillas que se siembran en la misma parcela, con lo que el número de plantas cambia cada año. El número de plantas supervivientes al final del año se expresa como $S(N) = \frac{10N}{1+(2N)^{1,2}}$, $N \geq 0$, donde N se mide en cientos de plantas.
(a) Calcular $S'(N)$.
(b) Se llama velocidad de reproducción, $v(N)$, al cociente $\frac{S(N)}{N}$. Demostrar que $v(N)$ es una función decreciente de N.

Solución:
(a) Denotemos por $f(N) = 10N$ y por $g(N) = 1 + (2N)^{1,2}$. Así $S(N) = \dfrac{f(N)}{g(N)}$.
Vamos a calcular la derivada de un cociente:

$$S'(N) = \frac{f'(N)g(N) - f(N)g'(N)}{(g(N))^2} = \frac{10(1 + (2N)^{1,2}) - 10N(1,2(2N)^{0,2}2)}{(1 + (2N)^{1,2})^2} = \frac{10(1 - 0,2(2N)^{1,2})}{(1 + (2N)^{1,2})^2}\ .$$

(b) En primer lugar vamos a calcular la expresión de $v(N)$:

$$v(N) = \frac{S(N)}{N} = \frac{10}{1 + (2N)^{1,2}} = 10(1 + (2N)^{1,2})^{-1}.$$

Para demostrar que $v(N)$ es una función decreciente de N, tenemos que ver que $v'(N) \leq 0$ para todo $N \geq 0$. Calculemos $v'(N)$:

$$v'(N) = \frac{-10(1,2(2N)^{0,2}2)}{(1 + (2N)^{1,2})^2} = \frac{-24(2N)^{0,2}}{(1 + (2N)^{1,2})^2} \leq 0, \qquad \text{si } N \geq 0,$$

ya que $(1 + (2N)^{1,2})^2 > 0$ y $(2N)^{0,2} > 0$ si $N \geq 0$.
Por lo tanto hemos visto que $v(N)$ es decreciente para todo $N \geq 0$.

3) Una población de ardillas esta dividida en dos edades: Jóvenes y Adultas. En cada periodo de tiempo sólo sobrevive la mitad de las ardillas jóvenes, muriendo todas las adultas. Además se sabe que el número medio de crías que provienen de las ardillas jóvenes es de una y de las adultas es de dos.
(a) Escribir la expresión matricial del modelo de Leslie asociado a la dinámica de la población de ardillas..
(b) A largo plazo, determina en que tanto por ciento crecerá o decrecerá la población de ardillas jóvenes y ardillas adultas.
(c) Calcular el porcentaje de ardillas jóvenes y adultas que habrá a largo plazo en la población.

Solución:
(a) Denotemos por J_n (resp. A_n) el número de Jóvenes (resp. Adultas) en la población de ardillas. Utilizando los datos de supervivencia y fecundidad la matriz de Leslie asociado a la dinámica de población de ardillas es:

$$\left\{\begin{array}{l} J_{n+1} = 1J_n + 2A_n \\ A_{n+1} = 0{,}5J_n + 0A_n \end{array}\right. \Longrightarrow \begin{pmatrix} J_{n+1} \\ A_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0{,}5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_n \\ A_n \end{pmatrix}.$$

(b) Vamos a calcular los autovalores de la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0{,}5 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow |M - xI_2| = \begin{vmatrix} 1-x & 2 \\ 0{,}5 & -x \end{vmatrix} = -(1-x)x - 1 = x^2 - x - 1.$$

Por lo tanto, para calcular los autovalores tenemos que resolver la ecuación de segundo grado:

$$x^2 - x - 1 = 0 \Longleftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Así el autovalor dominante es $\lambda_D = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \simeq 1{,}61803$. Entonces $\alpha = 1 - \lambda_D = 0{,}61803$ y tenemos que la población crece un 61 % a largo plazo.

(c) Para determinar como se distribuyen las ardillas jóvenes y adultas a largo plaza hemos de calcular el autovector correspondiente al autovalor dominante y normalizarlo:

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda_D & 2 \\ 0{,}5 & -\lambda_D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow 0,5x - \lambda_D y = 0 \Longleftrightarrow x = (1+\sqrt{5})y \Longleftrightarrow (x,y) = (1+\sqrt{5}, 1).$$

Normalizando el autovector de autovalor dominante obtenemos:

$$(x,y) = (0{,}763, 0{,}237).$$

Por lo tanto deducimos que a largo plazo habrá un 76,3 % de ardillas jóvenes y un 23,7 % de ardillas adultas.

4) Necesitamos solicitar un crédito de 40.000 euros por un periodo de 5 años y recibimos la oferta siguiente:

El banco nos cobrará un interés compuesto anual del 5 %, y la devolución del préstamo se hará de acuerdo con las siguientes reglas:

- **Al final del primer año, no devolvemos nada.**
- **Al final del segundo año, devolvemos 10.000 euros.**
- **Al final del tercer año, devolvemos 11.000 euros.**
- **Al final del cuarto año, devolvemos 12.000 euros.**

Hallar la cantidad que nos quedará por devolver al final del quinto año para cancelar el préstamo.

Solución: Denotemos por y_n el dinero que debemos al banco al finalizar el año n y por $r = 1 + \dfrac{5}{100}$.
Así tendremos:

$$\begin{cases} y_0 = 40000 & \text{el credito que hemos solicitado,} \\ y_1 = y_0 \cdot r = 42000 & \text{el dinero que debemos al finalizar el primer año,} \\ y_2 = y_1 \cdot r - 10000 = 34100 & \text{ya que devolvemos 10000 euros al finalizar el segundo año,} \\ y_3 = y_2 \cdot r - 11000 = 24805 & \text{ya que devolvemos 11000 euros al finalizar el tercer año,} \\ y_4 = y_3 \cdot r - 12000 = 14045{,}25 & \text{ya que devolvemos 12000 euros al finalizar el cuarto año,} \\ y_5 = y_4 \cdot r = 14745{,}5125 & \text{ya que no devolvemos nada en el quito año,} \end{cases}$$

Conclusión: Transcurridos los cinco años, debemos al banco 14745,5125 euros.

5) La velocidad de variación de una población de microorganismos con crecimiento limitado está dada por

$$\frac{dx}{dt} = -3(x-4)$$

donde x es el número de microorganismos (en millones) y t el tiempo transcurrido en horas. Inicialmente hay 2 millones de bacterias.

a) Hallar x en función de t, resolviendo la ecuación diferencial.

b) ¿Cuántas bacterias habrá después de 3 horas? ¿Cuántas habrá a largo plazo?

Solución:

(a) La ecuación diferencial que nos interesa es:

$$\frac{dx}{dt} = -3(x-4).$$

Es una ecuación diferencial de variables separables, así que si ponemos cada una de las variables (junto con su diferencial) en cada lado de la igualdad, obtenemos:

$$\frac{dx}{x-4} = -3dt \Rightarrow \int \frac{dx}{x-4} = -\int 3dt \Rightarrow \log|x-4| = -3t + C \Rightarrow e^{\log|x-4|} = e^{-3t+C} \Rightarrow x = 4 + Ke^{-3t},$$

donde $K = e^C$. Ahora vamos a calcular K utilizando el dato inicial:

$$x(0) = 2 \Longleftrightarrow 4 + K = 2 \Longleftrightarrow K = -2.$$

Por lo tanto:

$$x(t) = 4 - 2e^{-3t}$$

(b) La primera pregunta hace referencia al valor de $x(3)$:

$$x(3) = 4 - 2e^{-9} \simeq 3{,}99975.$$

A largo plazo:

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{t\to\infty} (4 - 2e^{-3t}) = 4.$$

6) Sea la función de 2 variables siguiente:

$$F(x,y) = 14x^2 - 2x^3 + 2y^2 + 4xy$$

a) Halla los puntos críticos de esta función.
b) Clasifica los puntos críticos de esta función.

Solución:
(a) Para calcular los puntos críticos primero tenemos que calcular el gradiente de $F(x,y)$:

$$\nabla F(x,y) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}(x,y), \frac{\partial F}{\partial y}(x,y)\right) = (28x - 6x^2 + 4y, 4y + 4x).$$

Un punto crítico (x_0, y_0) de F es aquel que cumple $\nabla F(x_0, y_0) = (0,0)$. Planteamos el sistema:

$$\begin{cases} 28x - 6x^2 + 4y = 0, \\ 4y + 4x = 0. \end{cases}$$

De la segunda ecuación obtenemos $y = -x$. Sustituyéndolo en la primera ecuación obtenemos:

$$28x - 6x^2 - 4x = 0 \Longleftrightarrow 24x - 6x^2 = 0 \Longleftrightarrow 6x(4 - x) = 0.$$

Por lo tanto $x = 0$ o $x = 4$. Así tenemos los puntos críticos:

$$(0,0) \qquad \text{y} \qquad (4,-4).$$

(b) Para clasificar los puntos críticos de $F(x,y)$ vamos a aplicar el criterio del Hessiano. Para ello tenemos que calcular las segundas derivadas parciales de F:

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,y) = 28 - 12x \\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x,y) = \dfrac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}(x,y) = 4 \\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x,y) = 4 \end{array}\right\} \Longrightarrow H\,F(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,y) & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}(x,y) & \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 - 12x & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Entonces tenemos:

- $(0,0)$: $|HF(0,0)| = 96 > 0$ y $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}(0,0) = 28 > 0$. Por lo tanto $(0,0)$ es un mínimo local de F.
- $(4,-4)$: $|HF(4,-4)| = -96 < 0$. Por lo tanto $(4,-4)$ es un punto de silla de F.