ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS • **Grado en Matemáticas** • **Grupo**

(18-6-2015) **Curso 2014-2015**

APELLIDOS, NOMBRE: ______________________________

Ejercicio 1	Ejercicio 2	Ejercicio 3	Ejercicio 4	TOTAL
3 puntos	2.5 puntos	2 puntos	2.5 puntos	10

Los apartados de cada ejercicio no necesariamente tienen la misma puntuación.

◇◇◇◇◇◇ Razonar debidamente las respuestas ◇◇◇◇◇◇

---

1. Estudia si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifica tu repuesta. (Recuerda que si la afirmación es verdadera hay que dar una demostración mientras que si la afirmación es falsa es suficiente con dar un contraejemplo):

a) El grupo diedral de orden $2n$, D_n, tiene un subgrupo normal de orden 2 para todo $n \geq 3$.

b) $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_8$ es isomorfo a S_4.

c) El anillo $\mathbb{Z}[(1+\sqrt{-3})/2]$ no puede ser un Dominio de Factorización Única ya que

$$(1+\sqrt{-3})(1-\sqrt{-3}) = 4 = 2 \cdot 2$$

son dos factorizaciones de $4 \in \mathbb{Z}[(1+\sqrt{-3})/2]$.

2. Sea $\mathbb{R}$ el cuerpo de los números reales, y denotemos por $\mathbb{R}^*$ su grupo multiplicativo. Considera los grupos de matrices:

$$G = GL(2,\mathbb{R}) = \left\{ M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad : \quad \det(M) \neq 0 \right\},$$

$$H = SL(2,\mathbb{R}) = \left\{ M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad : \quad \det(M) = 1 \right\}.$$

a) Demuestra que la aplicación $f : G \to \mathbb{R}^*$ dada por $f(M) = \det(M)$ es un homomorfismo de grupos.

b) Demuestra que el grupo cociente G/H es isomorfo a $\mathbb{R}^*$.

3. Considera el anillo $A = \mathbb{Z}[i]$. Factoriza el polinomio $P(X) = 2X + 2X^3$ en factores irreducibles en $A[X]$, y justifica por qué cada factor que encuentras es irreducible.

4. Demuestra que un grupo abeliano finito es cíclico si y sólo si sus subgrupos de Sylow son cíclicos.
