ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS (15-1-2015) • **Grado en Matemáticas** **Curso 2014-2015** • **Grupo**

APELLIDOS, NOMBRE: ____________________

Ejercicio 1	Ejercicio 2	Ejercicio 3	Ejercicio 4	TOTAL
3 puntos	3 puntos	2.5 puntos	1.5 puntos	10

Los apartados de cada ejercicio no necesariamente tienen la misma puntuación.

⋄⋄⋄⋄⋄⋄ Razonar debidamente las respuestas ⋄⋄⋄⋄⋄⋄

---

1. Estudia si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifica tu repuesta.
(Recuerda que si la afirmación es verdadera hay que dar una demostración mientras que si la afirmación es falsa es suficiente con dar un contraejemplo):

a) Todo grupo finito que no tiene subgrupos no triviales tiene orden primo o uno.

b) Sea G un grupo y $f : G \to G$ la aplicación definida por $f(x) = x^{-1}$. Entonces, f es isomorfismo si y sólo si G es abeliano.

c) Si $n \geq 5$ y $\alpha \in S_n$ es tal que $\alpha(1) = a$, $\alpha(3) = b$, $\alpha(5) = c$, entonces $\alpha(135)\alpha^{-1} = (abc)$.

---

2. Sea $\zeta \in \mathbb{C}$ tal que $\zeta \neq 1$, $\zeta^3 = 1$. Considera el conjunto:

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \zeta & 0 \\ 0 & \zeta^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \zeta^2 & 0 \\ 0 & \zeta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \zeta \\ \zeta^2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \zeta^2 \\ \zeta & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

a) Demuestra que G es un grupo.

b) ¿Es G isomorfo a $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$?

c) Haz una lista de los grupos no isomorfos de orden 6 y señala justificadamente a cuál es isomorfo G.

---

3. Sea $R = \mathbb{Z}[\sqrt{5}] = \{n + m\sqrt{5} : n, m \in \mathbb{Z}\}$.

a) Demuestra que R es un subanillo de $\mathbb{R}$.

b) Si $x = n + m\sqrt{5}$ se define la norma de x como $N(x) = n^2 - 5m^2$. Demuestra que si $x, y \in R$ entonces $N(xy) = N(x)N(y)$.

c) Demuestra que $x = n + m\sqrt{5} \in R$ es una unidad si y sólo si $n^2 - 5m^2 = \pm 1$.

d) Demuestra que 2, $3 - \sqrt{5}$, $3 + \sqrt{5}$ son elementos irreducibles en R.

e) Demuestra que R no es un dominio de factorización única.

---

4. Demuestra que todo grupo de orden 105 tiene un subgrupo de orden 35.
