Grupos VIII: Clases de Conjugación de elementos. Centralizadores.

Clases de conjugación de un elemento

1. Sea G un grupo, y sea $a \in G$. Denotamos por $\mathrm{cl}(a) = \mathrm{cl}_G(a) = \{xax^{-1} : x \in G\}$ la clase de conjugación de a en G. Calcula $\mathrm{cl}(a)$ donde

a) G es un grupo abeliano y $a \in G$. **b)** $G = D_3$ y $a \in D_3$. **c)** $G = A_4$ y $a = (123)$.

2. Consideremos S_n el grupo de permutaciones de n elementos.

a) Demuestra que para todo $g \in S_n$

$$g(b_1, b_2, \ldots, b_k)g^{-1} = (g(b_1), g(b_2), \ldots, g(b_k)).$$

b) Usando el apartado anterior, demuestra que si $a \in S_n$ es un producto de ciclos disjuntos de longitudes $d_1, d_2, \ldots, d_m$, entonces $\mathrm{cl}(a)$ son todos los elementos que son productos de ciclos disjuntos de longitudes $d_1, d_2, \ldots, d_m$.

c) Calcula los tamaños de las clases de conjugación de elementos de S_4.

3. Sea G un grupo finito.

a) Demuestra que $H \leq G$ es normal en G si y sólo si se puede poner como unión disjunta de varias clases de conjugación.

b) Usa los tamaños de las clases de conjugación en S_4 para calcular los subgrupos normales de S_4. Repite dicha operación para D_5.

Centralizador de un elemento

4. Sea G un grupo y $a \in G$. Denotamos por $C_G(a) = \{x \in G : xax^{-1} = a\}$ el centralizador de a en G. Ya demostramos que $C_G(a)$ es siempre un subgrupo de G.

a) Calcula $C_{A_5}((12345))$, $C_{A_5}((123)$ y $C_{A_5}((12)(34))$. *Sugerencia: Usa el ejercicio 2a).*

b) Usa la ecuación $|\mathrm{cl}_G(a)| = |G|/|C_G(a)|$ para calcular los tamaños de las clases de elementos de A_5.

c) Demuestra usando el apartado anterior que A_5 no tiene subgrupos normales.

5. Sea G un grupo no abeliano de tamaño p^3 con p primo. Usa la ecuación de clases conjugadas para demostrar que p divide a $|\mathrm{Z}(G)|$, y estudia $G/\mathrm{Z}(G)$ para concluir que $|\mathrm{Z}(G)| = p$.