ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS (30-10-2014)	• **Grado en Matemáticas** **Curso 2014-2015** •	**Hoja nº 7**

Grupos VII: Grupos abelianos finitos.

1. Sea G un grupo abeliano y sea n un entero positivo. Denotamos

$$G^n := \{g^n : g \in G\}.$$

a) Demuestra que G^n es un subgrupo de G.

b) Demuestra, mediante un ejemplo, que si G no es abeliano, G^n no tiene por qué ser un subgrupo de G.

c) Demuestra que si $n||G|$ entonces G^n es distinto de G.

d) Demuestra que si $|G| = rs$, donde r y s son enteros relativamente primos, entonces $G \simeq G^r \times G^s$. Además, G es cíclico si y sólo si G^r y G^s son cíclicos.

2. Demuestra que un grupo abeliano finito es cíclico si y sólo si sus subgrupos de Sylow son cíclicos.

3. Expresa U_{35} como producto de sus subgrupos de Sylow. Demuestra que el 2-subgrupo de Sylow no es cíclico.

4. Demuestra que si $n = rs$, donde r y s son enteros relativamente primos, entonces $U_n \simeq U_r \times U_s$.

5. Expresa a C_{100} como producto de dos grupos cíclicos H_1 de orden 4 y H_2 de orden 25. Halla un generador de cada uno de estos subgrupos.

6. Sea $G = C_5 \times C_8 \times C_9$ y $H = C_5 \times C_2 \times C_3$. Expresa la clase de isomorfismo de G/H como producto de grupos cíclicos.

7. Sea G un grupo abeliano de orden 12 generado por a y b y tal que $b^6 = e$ y $a^2 = b^4$ (donde e es el elemento neutro de G). Encontrar un grupo A que sea producto de grupos cíclicos y un isomorfismo $f : G \longrightarrow A$.

8. Demuestra que todo grupo abeliano de orden 45 contiene un elemento de orden 15. ¿Contiene necesariamente un elemento de orden 9?

9. Sea p primo. Indica cuántos grupos abelianos hay de orden p^3, salvo isomorfismo.

10. Determina la clase de isomorfismo de un grupo abeliano G de orden 120 sabiendo que tiene exactamente 3 elementos de orden 2.

11. Considera el grupo $G = \{\overline{1}, \overline{4}, \overline{11}, \overline{14}, \overline{16}, \overline{19}, \overline{26}, \overline{29}, \overline{31}, \overline{34}, \overline{41}, \overline{44}\}$ con la multiplicación módulo 45. Escribe G como producto directo de grupos cíclicos de orden potencia de un primo.

12. Sea A un grupo abeliano finitos. Demostrar que $A \simeq C_{n_1} \times \ldots \times C_{n_k}$ tal que n_{i+1} divide a n_i para $i = 1, \ldots, k-1$. Además, esta descomposición es única.

13. Clasificar todos los grupos abelianos de orden ≤ 20.