ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS (20-10-2014)	•	Grado en Matemáticas Curso 2014-2015	•	Hoja nº 6

Grupos VI: Permutaciones

1. Sean $\sigma_1, \ldots, \sigma_s \in S_n$ ciclos disjuntos, y sea $\alpha = \sigma_1 \circ \ldots \circ \sigma_s$. Demuestra que

$$|\alpha| = \text{m.c.m}(|\sigma_1|, \ldots, |\sigma_s|).$$

2. Calcula cada uno de los siguientes productos y escríbelos como producto de transposiciones. Indica cuales de estas permutaciones son pares.

$$\sigma = (12)(23)(34)\,; \qquad \beta = (246)(357)(123)\,; \qquad \gamma = (1234)(234)(34)\,.$$

3. Demuestra que si $n \geq 5$

a) (123) no genera un subgrupo normal en S_n,

b) (45) tampoco genera un subgrupo normal en S_n y

c) el producto de ambos subgrupos es un subgrupo.

4. Haz toda la lista de los elementos de A_3 y A_4.

5. Calcula la permutación σ^{100}, donde $\sigma = (12)(345)(6789)$.

6. Sea $H = \{\sigma \in S_n \mid \sigma(n) = n\} \leq S_n$. Si $\sigma \in H$, definimos $\hat{\sigma} \in S_{n-1}$ por $\hat{\sigma}(i) = \sigma(i)$ para $1 \leq i \leq n-1$. Probar que esta aplicación es un isomorfismo de grupos $H \to S_{n-1}$.

7. Probar que S_n está generado por las $n-1$ transposiciones: $(1\,2), (1\,3), \ldots, (1\,n)$.

8. Si a, b, c, d son elementos distintos, probar que $(a\,b)(a\,c) = (a\,c\,b)$ y $(a\,b)(c\,d) = (a\,c\,b)(a\,c\,d)$. Deducir que si $n \geq 3$, entonces A_n está generado por los 3-ciclos de S_n.

9. Consideramos los elementos $g = (1\,2\ldots n)$ y $h = (2\,n)(3\,n-1)\cdots$ de S_n. Probar que $\langle g, h\rangle \cong D_{2n}$.

10. El recíproco del Teorema de Lagrange no es cierto. El objetivo de este problema es demostrar que A_4, cuyo cardinal es 12, no contiene ningún subgrupo de orden 6.

a) Observa que A_4 tiene 8 elementos de orden 3.

b) Supongamos que $H < A_4$ tiene orden 6 y sea $a \in A_4$ un elemento de orden 3. Ahora compara los conjuntos:

$$H, \quad aH, \text{ y } a^2H$$

y demuestra que necesariamente $a \in H$. Concluye que H no puede existir.

11. El grupo $S_3 \times C_2$ es isomorfo a uno de los siguientes: C_{12}, $C_6 \times C_2$, A_4, D_6. Determina cuál de ellos es por eliminación.

12. Demuestra que $A_4 \times C_3$ no tiene subgrupos de orden 18.

13. Demostrar que S_4 es un producto semidirecto de $(C_2 \times C_2)$ por S_3.