Grupos V: Automorfismos. Producto directo y semidirecto.

El grupo de automorfismos de un grupo.

1. Demuestra que $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}) \cong C_2$.

2. Sea G un grupo, $x \in G$ y $\alpha \in \mathrm{Aut}(G)$. Demuestra que x y $\alpha(x)$ tienen el mismo orden.

3. Describe $\mathrm{Int}(D_3)$.

4. Determina $\mathrm{Int}(G)$ para G abeliano.

5. Determina $\mathrm{Int}(D_4)$. *Sugerencia: ¿Cuál es el centro de D_4?.*

Producto directo de grupos.

6. Teorema.

Sea G un grupo, y sean $H_1, \ldots, H_n \lhd G$ subgrupos normales tales que:

(i) $G = H_1 \cdots H_n$;

(ii) $(H_1 \cdots H_i) \cap H_{i+1} = \{e\}$; *donde $e \in G$ es el elemento neutro.*

Entonces

$$G \simeq H_1 \times \ldots \times H_n.$$

Demostraremos el teorema siguiendo los siguientes pasos:

a) Demuestra que la hipótesis (ii) implica que para cada par de índices distintos j, k, se tiene que $H_j \cap H_k = \{e\}$.

b) Deduce, usando el apartado anterior, que si $k, j \in \{1, \ldots, n\}$ son distintos y $h_k \in H_k$, $h_j \in H_j$, entonces $h_j h_k = h_k h_j$.

c) Utiliza el apartado anterior para probar que para cada $g \in G$ existen únicos $h_1 \in H_1, \ldots, h_n \in H_n$ tales que

$$g = h_1 \cdots h_n.$$

d) Con la notación del apartado anterior, considera la correspondencia:

$$\begin{array}{rccc} f: & G & \longrightarrow & H_1 \times \cdots \times H_n \\ & g & \longmapsto & (h_1, \ldots, h_n) \end{array}$$

Demuestra que f es una función y que además es un isomorfismo de grupos.

7. Demuestra que $G \times H$ es abeliano si y sólo si G y H son abelianos.

8. Decide de manera razonada si $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ es un grupo cíclico.

9. Demuestra que $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \simeq \mathbb{C}$ con la suma. Demuestra que $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ no puede ser isomorfo a $\mathbb{C}^*$ con el producto. *Sugerencia: Busca elementos con orden finito en $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ y en $\mathbb{C}^*$.*

10. Demuestra que $C_3 \times C_9$ no es cíclico y halla el número de elementos de orden 9.

11. El grupo diédrico D_n de orden $2n$, con $n \geq 3$, contiene un subgrupo de orden n (el generado por las rotaciones), y un subgrupo de orden 2 (el generado por cualquiera de las simetrías). Explica por qué D_n no puede ser isomorfo al producto de esos dos subgrupos.

12. En $C_4 \times C_2$ encuentra un subgrupo que no sea de la forma $H \times K$ con $H \leq C_4$ y $K \leq C_2$.

13. En $C_{12} \times C_4 \times C_{15}$ encuentra un subgrupo de orden 9 y demuestra que no es cíclico.

14. Determina $\mathrm{Aut}(C_2 \times C_2)$.

15. Si $H_1 \leq G_1$ y $H_2 \leq G_2$, entonces $H_1 \times H_2 \leq G_1 \times G_2$.

16. Encontrar todos lod subgrupos de $C_3 \times C_6$.

17. Describir todos los subgrupos de $C_2 \times C_4$.

18. Si $H_1 \trianglelefteq G_1$ y $H_2 \trianglelefteq G_2$, entonces $H_1 \times H_2 \trianglelefteq G_1 \times G_2$ y

$$(G_1 \times G_2)/(H_1 \times H_2) \cong G_1/H_1 \times G_2/H_2.$$

19. Sea n un número impar. Demostrar que $D_{2n} \cong D_n \times C_2$.

Producto semidirecto de grupos.

20. Demostrar que D_4 es un producto semidirecto de $C_2 \times C_2$ por C_2.

21. Demostrar que Q_8 no es isomorfo a un producto semidirecto de grupos no triviales.

22. Sea $\phi : A \to \mathrm{Aut}(G)$ un homomorfismos de grupos y $\tau \in \mathrm{Aut}(A)$. Entonces $\psi = \phi \circ \tau : A \to \mathrm{Aut}(G)$ es un homomorfismos de grupos y $G \times_\phi A \cong G \times_\psi A$.

23. Describir todos los productos semidirectos de C_5 por C_4 y decidir cuántos grupos no isomorfos aparecen.

24. Sea $\phi : A \to \mathrm{Aut}(G)$ un homomorfismo de grupos y $\tau \in \mathrm{Aut}(G)$. Si definimos $\psi(a) = \tau \circ \phi(a) \circ \tau^{-1}$ para todo $a \in A$, comprueba que $\psi : A \to \mathrm{Aut}(G)$ es homomorfismo y que $G \times_\phi A \simeq G \times_\psi A$.

25. Describir todos los productos semidirectos de $C_2 \times C_2$ por C_3 y decidir cuántos grupos no isomorfos aparecen.

26. Sean n y m dos números naturales coprimos. Demostrar que D_{nm} es un producto semidirecto de C_n por D_m.