

Grupos IV: Homomorfismos. Teoremas de Isomorfía.

1. Homomorfismos de grupos: propiedades básicas. Sea $f : G \rightarrow H$ un homomorfismo de grupos. Usando la notación multiplicativa demuestra que:

a) $f(e) = e'$, donde e denota el neutro de G y e' es el neutro de H .

b) $f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$ para todo $a \in G$.

c) Si $a^k = e$ entonces $f(a)^k = e'$ y concluye que $|f(a)|$ divide a $|a|$.

d) Sean $f, g : G \rightarrow H$ dos homomorfismos de grupos. Suponemos que $G = \langle S \rangle$. Demostrar que si $f(s) = g(s)$ para cualquier $s \in S$, entonces $f = g$.

2. Se define $f : D_3 \rightarrow \{\pm 1\}$ mediante: $f(g) = 1$ si g es una rotación y $f(g) = -1$ si g es una simetría. Demuestra que f es un homomorfismo de grupos. Calcula el núcleo de f .

3. Si (G, \cdot) es un grupo, definimos una nueva operación en G escribiendo $x * y := y \cdot x$. Demuestra que $(G, *)$ es un grupo y que $(G, *)$ y (G, \cdot) son isomorfos.

4. Homomorfismos de \mathbb{Z} en otros grupos, y de otros grupos en \mathbb{Z} .

a) Demuestra que todo homomorfismo $f : \mathbb{Z} \rightarrow G$ queda determinado por el valor $f(1)$.

b) Demuestra que para cada elemento $a \in G$ se puede definir un homomorfismo $f : \mathbb{Z} \rightarrow G$ tal que $f(1) = a$.

c) Si G es finito, el único homomorfismo $f : G \rightarrow \mathbb{Z}$ es el trivial.

5. Subgrupos de C_n .

a) Halla todos los subgrupos de C_6 . *Sugerencia: usa el segundo teorema de isomorfía.*

b) Demuestra que todo subgrupo de C_n es cíclico.

c) Indica cuántos subgrupos tiene C_{100} .

6. Homomorfismos de C_n en otros grupos.

a) Observa que el grupo C_n está generado por $\bar{1}$.

(i) Si $f : C_n \rightarrow G$ es un homomorfismo de grupos, demuestra que la función queda determinada por el valor $f(\bar{1})$, y $f(\bar{1})$ es un elemento de G cuyo orden divide a n .

(ii) Recíprocamente, demuestra que si $g \in G$ es un elemento cuyo orden divide a n , entonces existe un (único) homomorfismo de grupos $h : C_n \rightarrow G$ que cumple que $h(\bar{1}) = g$.

b) Halla todos los homomorfismos de grupos de C_6 en C_4 .

c) Halla todos los homomorfismos de grupos de C_4 en C_6 .

d) Halla todos los homomorfismos de grupos de C_6 en D_4 .

e) Decide de manera razonada si la correspondencia $x \rightarrow 3x$ de C_{12} a C_{10} es un homomorfismo de grupos.

f) Decide de manera razonada el número de homomorfismos sobreyectivos de C_{20} a C_8 . ¿Cuántos hay si no pedimos que los homomorfismos sean sobreyectivos?

7. Usando las propiedades de los homomorfismos de grupos demuestra que...

a) Si G es finito de orden 17, el único homomorfismo de G en el grupo de permutaciones S_6 es el trivial, y el único homomorfismo de S_6 en G es el trivial.

b) Sea G un grupo cíclico. Demuestra que $G \cong \mathbb{Z}$ ó $G \cong C_n$.

c) Si p es un primo y $|G| = p$, demuestra que $G \cong C_p$.

8. Homomorfismos de D_4 en otros grupos. Recuerda que el grupo D_4 está generado por dos elementos A y B que complen las condiciones $A^4 = Id$, $B^2 = Id$, y $AB = BA^{-1}$.

a) Si $f : D_4 \rightarrow G$ es un homomorfismo de grupos demuestra que $f(A)^4 = e$, $f(B)^2 = e$, y $f(A)f(B) = f(B)f(A)^{-1}$.

b) Recíprocamente, si a y b son dos elementos de G que cumplen las propiedades: $a^4 = e$, $b^2 = e$, y $ab = ba^{-1}$, demuestra que existe un (único) homomorfismo de grupos $h : D_4 \rightarrow G$ que cumple que $h(A) = a$ y $h(B) = b$.

c) Halla todos los homomorfismos de grupos de D_4 en C_6 .

9. Demuestra que S_3 y D_3 son isomorfos. Describe un homomorfismo inyectivo de D_n en S_n .

10. Demuestra que el grupo D_4 no es isomorfo al grupo de cuaterniones. *Sugerencia: Calcula el número de elementos de orden 2 que tiene cada grupo.*

11. Si $|X| = |Y|$, demuestra que $S_X \cong S_Y$.

12. El grupo de automorfismos de un grupo.

a) Demuestra que la composición de homomorfismos de grupos es un homomorfismo de grupos.

b) Si $f : G \rightarrow H$ es un isomorfismo de grupos, demuestra que $f^{-1} : H \rightarrow G$ es un isomorfismo. Así, si $G \cong H$, entonces $H \cong G$.

c) Si $G \cong H$ y $H \cong K$, demuestra que $G \cong K$.

d) Sea $\text{Aut}(G)$ el conjunto de todos automorfismos de G . Demuestra que $\text{Aut}(G)$ es un grupo con la composición.

e) Demuestra que $\text{Aut}(\mathbb{Z}) \cong C_2$.

f) Sea G un grupo, sea $x \in G$ y sea $\alpha \in \text{Aut}(G)$. Demuestra que x y $\alpha(x)$ tienen el mismo orden.

g) Sea $g \in G$. Demuestra que la aplicación:

$$\begin{array}{ccc} \varphi_x : G & \longrightarrow & G \\ & & g \mapsto xgx^{-1} \end{array}$$

es un automorfismo de G .

h) Se define el *interior de G* , $\text{Int}(G)$, como el subconjunto de los automorfismos de G que son de la forma descrita en el apartado anterior. Demuestra que $\text{Int}(G)$ es un subgrupo normal de $\text{Aut}(G)$.

i) Describe $\text{Int}(D_3)$.

j) Demuestra que $\text{Int}(G)$ es isomorfo a un cociente de G por algún subgrupo normal H de G .