ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS (22-9-2014) • **Grado en Matemáticas** **Curso 2014-2015** • **Hoja nº 3**

Grupos III: Subgrupos. Subgrupos normales.

1. Subgrupos de $\mathbb{Z}$.

a) Demuestra que todo subgrupo de $\mathbb{Z}$ es cíclico, de la forma $k\mathbb{Z}$ para algún entero k.

b) Demuestra que hay tantos subgrupos en $\mathbb{Z}$ como enteros no negativos.

c) Dados dos enteros positivos r, s, demuestra que $r\mathbb{Z} \subset s\mathbb{Z}$ si y sólo si r es un múltiplo de s.

d) Halla todos los subgrupos de $\mathbb{Z}$ que contienen a $6\mathbb{Z}$.

2. Otra presentación del grupo Q_8 de cuaterniones. Definimos:

$$Q_8 := \{1, i, j, k, -1, -i, -j, -k\}$$

con las relaciones:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1 = ijk.$$

a) Observa que Q_8 también se puede presentar como

$$Q_8 := \{1, i, j, k, -1, -i, -j, -k\}$$

con las relaciones:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1; ij = k, jk = i, ki = j, ji = -k, kj = -i, ik = -j.$$

b) Halla el orden de cada elemento de Q_8.

c) Observa que $(-1)i = i^3 = i(-1)$, y que -1 conmuta con i con j y con k.

d) Observa que $Z(Q_8) = \{1, -1\}$.

e) Halla el retículo de los subgrupos de Q_8.

f) Observa que todo subgrupo H de Q_8 es normal. Estudia los distintos grupos Q_8/H.

3. Algunas propiedades de los subgrupos normales.

a) Demuestra que si H y K son normales en G, entonces $H \cap K$ también lo es.

b) Si $N \trianglelefteq G$ y $N \subseteq H \leq G$, demuestra que:

(i) $N \trianglelefteq H$;

(ii) H/N es un subgrupo de G/N;

(iii) $H/N \trianglelefteq G/N$ si y sólo si $H \trianglelefteq G$.

c) Supongamos que $N \trianglelefteq G$ y $N \subseteq H \leq G$. Demuestra que $|G : H| = \mid G/N : H/N \mid$.

4. El producto de dos subgrupos.

a) Encuentra en S_3 dos subgrupos H, K tales que HK no sea subgrupo de S_3.

b) Sea $(G, *)$ un grupo y sean $H < G$ y $K \triangleleft G$. Demuestra que $HK = KH$ y que $HK < G$. Compara este resultado con el apartado anterior.

5. Encuentra todos los subgrupos normales de S_3 y de D_4.