ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS (17-12-2014)	•	Grado en Matemáticas Curso 2014-2015	•	Hoja nº 14

Anillos III: DF, DFU, DIP, DE.

1. Demostrar que el anillo de los enteros algebraicos $\overline{\mathbb{Z}} := \{\alpha \in \mathbb{C} \,|\, \exists p(x) \in \mathbb{Z}[x] \text{ mónico tal que } p(\alpha) = 0\}$ es un dominio pero no es un DF.

2. Demostrar que $\mathbb{Z}[x]$ no es DIP. (*Sugerencia:* El ideal $\langle 2, x\rangle$ no es principal)

3. Sea D un DIP. Demostrar que todo ideal primo es maximal.

4. Sea $d \in \mathbb{Z}$ libre de cuadrados. Definimos la aplicación $N_d : \mathbb{Z}[\sqrt{d}] \longrightarrow \mathbb{Z}$, como $N(a+b\sqrt{d}) = a^2 - b^2 d$. Demostrar:

a) $U(\mathbb{Z}[\sqrt{d}]) = \{z \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}] \,|\, N_d(z) = \pm 1\}$.

b) $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ es un DF.

c) $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ no es un DFU. (*Sugerencia:* Demostrar que las factorizaciones $6 = 3\cdot 2 = (1+\sqrt{-5})(1-\sqrt{-5})$ no son asociadas)

d) Sea $d < 0$ y $z, w \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$. La división de números complejos nos da $z/w = r + s\sqrt{d}$ con $r, s \in \mathbb{Q}$. Se pide:

- $z = fw + g$ donde $f, g \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ cumplen $f = m + n\sqrt{d}$ tal que $|r - m|, |s - n| \leq 1/2$. ¿Quién es g?
- Calcular la relación entre $N_d(g)$ y $N_d(w)$.
- Deducir que con este argumento $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$ y $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ son DE con la aplicación N_{-1} y N_{-2} respectivamente. En particular son DFUs.
- ¿Se puede concluir lo mismo para $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$?

5. Sea p un número primo. Definimos el conjunto

$$\mathbb{Z}_{(p)} = \left\{ \frac{r}{s} \in \mathbb{Q} \,\middle|\, p \nmid s \right\}.$$

Demostrar:

a) $\mathbb{Z}_{(p)}$ es un subanillo en $\mathbb{Q}$. Hallar el grupo de las unidades.

b) $\mathbb{Z}_{(p)}$ es un DIP. (*Sugerencia:* Demostrar que un ideal no nulo de $\mathbb{Z}_{(p)}$ está generado por p^k con $k \geq 0$.)

c) $\langle p\rangle = p\mathbb{Z}_{(p)}$ es el único ideal maximal de $\mathbb{Z}_{(p)}$.

d) ¿A qué cuerpo es isomorfo el anillo cociente $\mathbb{Z}_{(p)}/\langle p\rangle$?

e) $\mathbb{Z}_{(p)}$ es un DE.

DF	**D**ominio de **F**actorización
DFU	**D**ominio de **F**actorización **Ú**nica
DIP	**D**ominio de **I**deales **P**rincipales
DE	**D**ominio **E**uclideo