ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS (11-12-2014)	•	Grado en Matemáticas Curso 2014-2015	•	Hoja nº 13

Anillos II: Anillos de polinomios.

1. Sabemos que si A es un dominio de integridad conmutativo con unidad, entonces $U(A[x]) = U(A)$. ¿Sucede lo mismo si A no es un dominio?

2. Sea K un cuerpo. Demuestra:

a) char $(K) =$ char $(K[x])$.

b) Todo ideal en $K[x]$ es principal.

c) Si $p(x) \in K[x]$ no nulo, entonces $p(x) \in U(K[x])$ si y sólo si grado$(p(x)) = 0$.

d) Si $p(x) \in K[x]$, grado$(p(x)) = n > 0$, entonces $K[x]/\langle f(x)\rangle$ es un K-espacio vectorial de dimensión n y base $\{\overline{1}, \overline{x}, \overline{x}^2, \ldots, \overline{x}^{n-1}\}$.

3. Sea K un cuerpo, y sean $p(x), q(x) \in K[x]$ no nulos. Demuestra

a) $\langle p(x)\rangle \subset \langle q(x)\rangle$ si y sólo si $q(x)$ divide a $p(x)$.

b) $\langle p(x)\rangle = \langle q(x)\rangle$ si y sólo si $q(x) = up(x)$, $u \in U(K[x])$.

c) Hay tantos ideales propios no nulos en $K[x]$ como polinomios mónicos.

d) $p(x)$ es irreducible si y sólo si genera un ideal maximal.

e) Si $a \in K$, entonces $K[x]/\langle x - a\rangle$ es isomorfo a K.

4. Factoriza los siguientes polinomios en su correspondiente anillo:

a) $x^5 + 2x + 2 \in \mathbb{Q}[x]$. **b)** $x^4 - 1 \in \mathbb{R}[x]$. **c)** $x^4 - 1 \in \mathbb{C}[x]$.
d) $x^4 - 1 \in \mathbb{Z}_3[x]$. **e)** $x^4 - 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$. **f)** $x^4 + x^3 - x^2 \in \mathbb{Z}_2[x]$. **g)** $x^6 + x^2 + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$.

5. Demuestra que $x^{p-1} - 1$ factoriza como producto de $p - 1$ polinomios mónicos de grado uno en $\mathbb{Z}_p[x]$. *Sugerencia: Observa que $U(\mathbb{Z}_p)$ es un grupo de orden $p - 1$.*

6. Demuestra los siguientes isomorfismos, dando el isomorfismo explicitamente:
a) $\mathbb{Q}[x, y]/\langle x, y\rangle \simeq \mathbb{Q}$.

b) $\mathbb{Z}[x]/I \simeq \mathbb{Z}$, donde $I = \{p(x) \in \mathbb{Z}[x] \mid p(2) = 0\}$.

c) $\mathbb{Q}[x]/I \simeq \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$, donde $I = \{p(x) \in \mathbb{Q}[x] \mid p(\sqrt{2}) = 0\}$.

7. Extensiones de cuerpos.

a) Demuestra que el cuerpo $\mathbb{Q}[i]$ es isomorfo a $\mathbb{Q}[x]/\langle x^2 + 1\rangle$, y que $\mathbb{C}$ es isomorfo a $\mathbb{R}[x]/\langle x^2 + 1\rangle$.

b) Demuestra que $x^3 + x + 1$ es irreducible en $\mathbb{Z}_2[x]$, e indica cuántos elementos tiene el cuerpo

$$F_8 = \mathbb{Z}_2[x]/\langle x^3 + x + 1\rangle.$$

c) Construye un cuerpo con 25 elementos.

d) Sea $h : K \longrightarrow A$ un homomorfismo de anillos distinto del trivial. Demuestra que si K es un cuerpo, entonces h es inyectivo. Si A es también un cuerpo, se dice que A *es una extensión de* K. Así, en el apartado anterior se dice que F_8 es una extensión finita de $\mathbb{Z}_2$ de grado 3, dado que el cuerpo F_8 es un espacio vectorial de dimensión 3 sobre $\mathbb{Z}_2$.

e) Halla un cuerpo que sea una extensión de grado 2 de $\mathbb{Z}_3$.

f) Demuestra que dado un cuerpo finito K, existen extensiones de grado arbitrariamente grande.