ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS • **Grado en Matemáticas** • **Hoja**
(9-12-2014) **Curso 2014-2015** **nº 12**

Anillos I: Nociones básicas.

1. Sea $(A,+,\cdot)$ un anillo. Demuestra que A puede tener solamente un elemento neutro con respecto a la suma $(+)$. Además, si A tiene unidad, entonces tiene un único elemento neutro con respecto a la multiplicación $(\cdot)$.

2. Sea $(A,+,\cdot)$ un anillo. Demuestra:

a) Si 0 denota el elemento neutro de $(A,+)$, entonces $a\cdot 0 = 0\cdot a = 0$, para todo $a\in A$.

b) Si $-a$ denota el elemento opuesto de a en $(A,+)$, entonces

$$(-a)\cdot b = -(a\cdot b), \qquad a\cdot(-b) = -(a\cdot b), \qquad (-a)\cdot(-b) = (a\cdot b).$$

3. Sea $(A,+,\cdot)$ un anillo. Si $a\in A$ no es un divisor de cero y $b,c\in A$, entonces:

a) Si $a\cdot b = a\cdot c$, se tiene $b=c$.

b) Si $b\cdot a = c\cdot a$, se tiene $b=c$.

4. Determinar si los siguientes conjuntos con las correspondientes operaciones son

anillo	anillo conmutativo	anillo con unidad	dominio de integridad	anillo de división

a) $(\mathcal{C}([0,1]),+,\cdot)$, donde $\mathcal{C}([0,1]) := \{f:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R} \text{ continua}\}$ y para $x\in[0,1]$ definimos las operaciones

$$(f+g)(x) = f(x)+g(x), \qquad (f\cdot g)(x) = f(x)g(x).$$

b) $(M_n(A),+,\cdot)$ donde $(A,+,\cdot)$ es una anillo con unidad y las operaciones en $M_n(A)$ son las inducidas por las de A.

c) $(\mathbb{Z}[\sqrt{d}],+,\cdot)$, donde d es un entero libre de cuadrados, $\mathbb{Z}[\sqrt{d}] = \{a+b\sqrt{d}\,|\,a,b\in\mathbb{Z}\}$ y las operaciones se definen como:

$$\begin{aligned}(a+b\sqrt{d}) + (a'+b'\sqrt{d}) &= (a+a')+(b+b')\sqrt{d},\\ (a+b\sqrt{d}) \cdot (a'+b'\sqrt{d}) &= (aa'+bb'd)+(ab'+ba')\sqrt{d}.\end{aligned}$$

d) $(\mathbb{Q}[i],+,\cdot)$ donde $\mathbb{Q}[i] = \{a+bi\,|\,a,b\in\mathbb{Q}\}$ y las operaciones son las inducidas de $\mathbb{C}$.

5. Defidir si los siguientes conjuntos son subanillos de $\mathbb{R}$:

$$R_1 = \{a+b\sqrt[2]{3}\,|\,a,b\in\mathbb{Z}\}, \qquad R_2 = \{a+b\sqrt[3]{3}+c\sqrt[3]{9}\,|\,a,b,c\in\mathbb{Z}\}, \qquad R_3 = \{a+b\sqrt[3]{3}\,|\,a,b\in\mathbb{Z}\}.$$

6. Sea $r\in\mathbb{R}$. Decidir si el conjunto $M_r = \{f\in\mathcal{C}([0,1])\,|\,f(r)=0\}$ es un ideal del anillo $\mathcal{C}([0,1])$.

7. Calcular los ideales de un anillo de división A.

8. Sean $a,b\in\mathbb{Z}$, entonces

$$\langle\{a,b\}\rangle = a\mathbb{Z}+b\mathbb{Z} = mcd(a,b)\mathbb{Z}, \qquad a\mathbb{Z}\cap b\mathbb{Z} = mcm(a,b)\mathbb{Z}.$$

9. Sea A un anillo conmutativo con unidad. Supongamos que A es finito (i.e. $|A| < \infty$).

a) Demuestra que todo elemento no nulo de A es o bien un elemento invertible, o bien un divisor de cero.

b) Demuestra que si A es un dominio de integridad entonces es un cuerpo.

c) Decide de manera razonada si las afirmaciones anteriores son ciertas si no suponemos que A es finito.

10. Sea $\{J_i\}_{i\in I}$ una familia de ideales en un anillo conmutativo con unidad A . Demuestra que $\cap_{i\in I} J_i$ es también un ideal. ¿Qué puedes decir de $\cup_{i\in I} J_i$?

11. Sea A un anillo conmutativo con unidad y $S \subset A$. Definamos el ideal de A generado por S como la intersección de todos los ideales que contienen a S. Lo denotamos por $\langle S\rangle$. Demostrar:
a) $\langle S\rangle$ es el menor ideal que contiene a S.

b) Si $S = \{s_1, \ldots, s_n\}$ es un conjunto finito. Entonces $\langle S\rangle = \{a_1 s_1 + \cdots + a_n s_n \,|\, a_1, \cdots, a_n \in A\}$.

12. Sea A un anillo conmutativo con unidad y sea $a \in A$ un elemento. Demuestra

a) $\langle a\rangle = A$ si y solo si $a \in U(A)$. ¿Qué ocurre si A no es conmutativo?

b) A es un cuerpo si y solo si el único ideal propio es el cero.

c) Si $u \in U(A)$ entonces $\langle ua\rangle = \langle a\rangle$.

13. Ideales en $\mathbb{Z}$.

a) Demuestra que todo ideal en $\mathbb{Z}$ es principal. Es decir, todo ideal I de $\mathbb{Z}$ es de la forma $I = n\mathbb{Z}$ para algún $n \in \mathbb{Z}$.

b) Halla todos los ideales primos de $\mathbb{Z}$, e indica cuáles son maximales.

c) Demuestra que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ es un cuerpo si y sólo si n es primo.

14. Encuentra todos los ideales maximales en $\mathbb{Z}_8$, $\mathbb{Z}_{10}$, $\mathbb{Z}_n$.

15. Si A y B son dos anillos, probar que el producto cartesiano $A \times B$ también lo es con las operaciones obvias (componente a componente).

16. Sea $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ el anillo producto cartesiano de $\mathbb{Z}$ con $\mathbb{Z}$.
a) Encontrar un subanillo de A que no sea un ideal de A.

b) Demuestra que $\{(3x, y) : x, y \in \mathbb{Z}\}$ es un ideal maximal de A.

c) Demuestra que $\{(a, 0) : a \in \mathbb{Z}\}$ es un ideal primo pero no maximal en A.

17. Demuestra que si A es un dominio de integridad con unidad 1, entonces su característica (el minimo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $n \cdot 1 = 0$) sólo puede ser 0 o bien un primo p. Es decir, $\mathrm{char}(A) = 0$ o p.

18. Sean los anillos $A_1 = \mathbb{Z}[\sqrt{3}] = \{a + b\sqrt{3}|a, b \in \mathbb{Z}\}$ y $A_2 = \mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2}|a, b \in \mathbb{Z}\}$. Consideramos los anillos cociente $R_i = A_i/2A_i$. Para $i = 1, 2$, calcular:
a) cuantos elementos tiene R_i,

b) todos los subanillos de R_i,

c) todos los ideales de R_i.

19. Sea A un dominio de integridad conmutativo y unitario. Decimos que dos elementos de A están asociados si uno se obtiene del otro multiplicando por un elemento de $U(A)$. Demostrar que a y b están asociados si y sólo si los ideales generados por a y b coinciden. ¿Se puede afirmar lo mismo si A no es un dominio de integridad?

20. Calcular los elementos invertibles de los siguientes anillos:
a) $\mathbb{Z}$, **b)** $\mathbb{Z}[i]$, **c)** $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$, **d)** $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$, **e)** $\mathbb{Z}_n$, **f)** $\mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$, **g)** $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$, **h)** $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_4)$.

21. Ecuaciones.

a) Sea A un anillo y sea $a \in A$ un elemento tal que $a^2 = a$. Decide de manera razonada si necesariamente $a = 0$ o $a = 1$. *Sugerencia: Analiza el caso* $a = \overline{5} \in A = Z_{20}$.

b) ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación $2x = 4$ en $\mathbb{Z}_{12}$?

c) Demuestra que si R es un dominio de integridad, entonces la ecuación $ax = b$ con $a, b \in R$ o bien no tiene solución, o bien tiene solución única.

d) Encuentra todas las soluciones de la ecuación $x^2 - 5x + 6 = 0$ en $\mathbb{Z}_{12}$, en $\mathbb{Z}_7$, y en $\mathbb{Z}_2$.

e) Demostrar que la ecuación $x^6 + y^6 = 3z^6$ tiene solución única en números enteros (Ayuda: considerar primero esta ecuación sobre $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$).

22. Sean A, A' anillos y $f : A \longrightarrow A'$ un homomorfismo. Demostrar:
a) $f(0) = 0'$, donde 0 es el neutro de A y $0'$ es el neutro de A'.

b) $f(-a) = -f(a)$ para todo $a \in A$.

c) Si S es un subanillo de A, $f(S)$ es un subanillo de A'.

d) Si S' es un subanillo de A', $f^{-1}(S')$ es un subanillo de A.

e) Si J es un ideal de A', $f^{-1}(J)$ es un ideal de A.

f) Si f es sobreyectiva e I es un ideal de A, $f(I)$ es un ideal de A'.

g) Si f es sobreyectiva y A tiene unidad 1_A, entonces A' tiene unidad $1_{A'} = f(1_A)$.

23. Encontrar ejemplos en los que la condición de que f sea sobreyectiva en los dos últimos apartados del ejercicio anterior es necesaria.

24. Decide para que valores de $n \in \mathbb{Z}$ la aplicación $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ definida por $f(z) = nz$ es un homorfismo de anillos.

25. Sea el anillo $A = 5\mathbb{Z}$. Demuestra que $I = 15\mathbb{Z}$ es un ideal de A y que A/I es isomorfo a $\mathbb{F}_3 = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

26. Definimos el conjunto $N = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$. Demostrar que N es un cuerpo con las operaciones suma y producto de matrices. Además la aplicación $g : \mathbb{C} \longrightarrow N$ definida por $g(a+bi) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ es un isomorfismo de cuerpos.

27. 28. Decide si son ciertos los siguiente isomorfismos

a) $\mathbb{Z} \simeq 2\mathbb{Z}$ **b)** $\mathbb{Q}(\sqrt{-2}) \simeq \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ **c)** $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \simeq \mathbb{Q}(\sqrt{3})$.

29. Teoremas de Isomorfía para anillos. Sea A un anillo, e I y J ideales de A. Demuestra los siguientes resultados:
a) **(2º)** I/J es un ideal de A/J y $A/I \simeq (A/J)/(I/J)$.

b) **(3º)** $I + J = \{i + j \mid i \in I,\ j \in J\}$ es un ideal de A y $(I + J)/J \simeq I/(I \cap J)$.

30. Sea K un cuerpo. Demostrar que K y su cuerpo de fracciones son isomorfos.