Grupos XI: Teoremas de Sylow. Grupos de orden pequeño.

1. Demuestra que en un grupo de orden 20 hay un único subgrupo de orden 5 y que éste es normal.

2. Demuestra que en un grupo de orden 30 hay un subgrupo normal de orden 5 o uno normal de orden 3.

3. Prueba que cualquier grupo de orden 35 es cíclico.

4. Sea G un grupo de orden 36 no abeliano. Demuestra que hay más de un 2-grupo de Sylow o hay más de un 3-grupo de Sylow.

5. Halla todos los 3-subgrupos de Sylow de A_4.

6. Decide de manera razonada si dos ciclos de longitud 3 son conjugados en A_4.

7. Sea G un grupo y sea H un p-subgrupo de Sylow en G. Demuestra

a) H es un p-subgrupo de Sylow en $N_G(H)$.

b) H es el único p-subgrupo de Sylow en $N_G(H)$.

8. Indica cuántos 5-subgrupos de Sylow hay en S_5. Exhibe al menos dos que sean distintos.

9. Indica cuántos 3-subgrupos de Sylow hay en S_5. Exhibe al menos dos que sean distintos.

10. Sea G un grupo de orden 5×7^2. Determina G salvo isomorfismo. Sugerencia: Demuestra G es abeliano.

11. Sea $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$. Si $P \leq H \leq G$, entonces $P \in \mathrm{Syl}_p(H)$.

12. Supongamos que $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$ y sea $N \lhd G$. Entonces $P \cap N \in \mathrm{Syl}_p(N)$ y $PN/N \in \mathrm{Syl}_p(G/N)$.

13. **a)** Sea G un grupo con 28 elementos. Demostrar que $G \cong P \rtimes Q$ donde P es un 7-grupo y Q es un 2-grupo.

b) Describir todos los productos semidirectos $C_7 \rtimes C_4$.

c) ¿Hay algún grupo no abeliano con 28 elementos no isomorfo a un producto semidirecto $C_7 \rtimes C_4$?

d) Describir todos los grupos de orden 28, salvo isomorfismo.

14. Si $H \leq G$ es un grupo finito y $Q \in \mathrm{Syl}_p(H)$, probar que existe $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$ tal que $P \cap H = Q$. Concluir que $\#\mathrm{Syl}_p(H) \leq \#\mathrm{Syl}_p(G)$.

15. Supongamos que $|G| = p^3q$, donde p y q son primos distintos. Si $|G| \neq 24$, probar que G tiene un p-Sylow o un q-Sylow normal.

16. Probar que no existen grupos simples de orden pqr donde p, q, r son primos.

17. Sean p y q primos tales que $p^2q^2 \neq 36$. Probar que no existen grupos simples de orden p^2q^2.

18. Clasificar todos los grupos de orden 18 y 30.

Todos los grupos, salvo isomorfismo, de orden ≤ 15:

n	Abelianos	No abelianos
1	$\mathbb{Z}_1$	
2	$\mathbb{Z}_2$	
3	$\mathbb{Z}_3$	
4	$\mathbb{Z}_4 \quad , \quad \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	
5	$\mathbb{Z}_5$	
6	$\mathbb{Z}_6$	$S_3 \cong D_3$
7	$\mathbb{Z}_7$	
8	$\mathbb{Z}_8 \quad , \quad \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2 \quad , \quad \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	$D_4 \quad , \quad Q_8$
9	$\mathbb{Z}_9 \quad , \quad \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$	
10	$\mathbb{Z}_{10}$	D_5
11	$\mathbb{Z}_{11}$	
12	$\mathbb{Z}_{12} \quad , \quad \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_2$	$D_6 \quad , \quad A_4 \quad , \quad \mathbb{Z}_3 \times_\varphi \mathbb{Z}_4$ $\varphi(\overline{k})(x) = (-1)^k x$
13	$\mathbb{Z}_{13}$	
14	$\mathbb{Z}_{14}$	D_7
15	$\mathbb{Z}_{15}$	