ÁLGEBRA LINEAL

Grado en Matemáticas
Curso 2013–2014

Examen
9-6-2014

Grupo
_1_

APELLIDOS, NOMBRE: ______________________________

Ejercicio 1	Ejercicio 2	Ejercicio 3	Ejercicio 4	TOTAL
2 puntos	2 puntos	3 puntos	3 puntos	10

Los apartados de cada ejercicio no necesariamente tienen la misma puntuación.

◇◇◇◇◇◇ Razonar debidamente las respuestas ◇◇◇◇◇◇

Dispones de 3 horas y media para hacer el examen.

Ejercicio 1. Decide de manera razonada si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas (Recuerda que si la afirmación es verdadera hay que dar una demostración mientras que si la afirmación es falsa es suficiente con dar un contraejemplo).

(i) Dado $a \in \mathbb{C}$, el conjunto $W_a = \{M \in M_n(\mathbb{C}) : traza(M) = a\}$ es un $\mathbb{C}$-subespacio vectorial de $M_n(\mathbb{C}) \iff a = 0$.

(ii) Dado $p \in \mathbb{R}_2[x]$, definimos la aplicación $F(p) = p'(2) - \int_{-1}^{1} p(t)dt$. Entonces F es un elemento del espacio dual $\mathbb{R}_2[x]^*$ y su expresión en terminos de la base dual de la base $\mathcal{B} = \{u_0, u_1, u_2\}$, donde $u_n = x^n$, es

$$F = -2u_0^* + u_1^* + \frac{10}{3}u_2^*.$$

Ejercicio 2. Sea f un endomorfismo de un espacio vectorial V.

(i) Demuestra que $Im(f)$ es un subespacio de V y que, además, es invariante por f, de modo que f induce una aplicación lineal $h : Im(f) \longrightarrow Im(f)$.

(ii) Supón ahora además que V de dimensión finita. Demuestra que

$$dim(Im(f) \cap Ker(f)) = dim(Im(f)) - dim(Im(f^2)).$$

Ejercicio 3. Sea $f : M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow M_{2x3}(\mathbb{R})$ la aplicación lineal definida por

$$f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & 0 & a+b+c+d \\ c+b & d+a & 0 \end{pmatrix}.$$

(i) Calcula la matriz de f con respecto a las bases canónicas de $M_2(\mathbb{R})$ y $M_{2x3}(\mathbb{R})$.

(ii) Calcula una base de $Ker(f)$ y una base de $Im(f)$.

(iii) Sea el subespacio $W = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid A = A^t\}$. Calcula la dimensión de $W \cap Ker(f)$. Decide si $M_2(\mathbb{R}) = W \oplus Ker(f)$.

(iv) Encuentra una base de $M_{2x3}(\mathbb{R})/Im(f)$ y calcula las coordenadas con respecto a esa base de la clase $\left[\begin{pmatrix} 3 & 0 & 6 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}\right] \in M_{2x3}(\mathbb{R})/Im(f)$.

Ejercicio 4. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -4 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

(i) Demuestra que el polinomio característico de A es $x(x+2)^3$.

(ii) Determina si A es diagonalizable o no.

(iii) Determina la forma canónica de Jordan J de A.

(iv) Si J tiene coeficientes racionales, encuentra una base de $\mathbb{Q}^4$ respecto a la cual el endomorfismo de $\mathbb{Q}^4$ definido por A tenga matriz de Jordan J y una matriz P tal que $AP = PJ$. ¿Qué representa la matriz P?

(v) Calcula el polinomio mínimo de A.