ÁLGEBRA LINEAL

Grado en Matemáticas
Curso 2013–2014

Examen
13-1-2014

Grupo 71_

APELLIDOS, NOMBRE: ______________________________

Ejercicio 1	**Ejercicio 2**	**Ejercicio 3**	**Ejercicio 4**	**TOTAL**
2 puntos	2 puntos	3 puntos	3 puntos	10

Los apartados de cada ejercicio no necesariamente tienen la misma puntuación.

◇◇◇◇◇◇ Razonar debídamente las respuestas ◇◇◇◇◇◇

Dispones de 3 horas y media para hacer el examen.

Ejercicio 1. Decide de manera razonada si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

(i) La aplicación $f : M_2(\mathbb{Q}) \longrightarrow M_2(\mathbb{Q})$ definida por $f(A) = traza(A) \cdot A^t$ es lineal.

(ii) Sea $\{u_1, \ldots, u_n\}$ una base del K-espacio vectorial V. Para $i = 1, \ldots, n$ consideramos las aplicaciones "proyección sobre la i-ésima coordenada", $\pi_i : V \longrightarrow K$, definidas para $v = a_1u_1 + \cdots + a_nu_n \in V$ por $\pi_i(v) = a_i$. Entonces $\pi_i \in V^*$ y $\{\pi_1, \ldots, \pi_n\}$ es una base de V^*.

Ejercicio 2. Sea K un cuerpo y $R = K_1[x]$ los polinomios de grado menor o igual que 1 con coeficientes en K. Consideramos

$$V = Mat_{2x2}(R) = \left\{ \begin{pmatrix} a_0 + a_1x & b_0 + b_1x \\ c_0 + c_1x & d_0 + d_1x \end{pmatrix} : a_i, b_i, c_i, d_i \in K, i = 0, 1 \right\} = \{M_0 + xM_1 : M_0, M_1 \in Mat_{2x2}(K)\}.$$

V es un K-espacio vectorial con las operaciones usuales de matrices [no hace falta que lo demuestres] . Sean

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in V, \qquad W = \{M \in V : AM - MA = 0\}.$$

(i) Encuentra una base del K-espacio vectorial V.

(ii) Demuestra que la aplicación $f : V \longrightarrow V$ dada por $f(M) = AM$ es un endomorfismo del K-espacio vectorial V.

(iii) Demuestra que W es un subespacio vectorial de V. ¿Cuál es la dimensión de W?

(iv) Demuestra que W es invariante por f.

Ejercicio 3. Sean $u_1, u_2, u_3, u_4 \in \mathbb{Q}_3[x]$ dados por

$$u_1 = 1, \quad u_2 = 1 + x, \quad u_3 = 1 + x^2, \quad u_4 = 1 + x^2 + x^3$$

y sea $F : \mathbb{Q}_3[x] \longrightarrow \mathbb{Q}_3[x]$ la (única) aplicación lineal tal que

$$F(u_1) = u_3 - u_4, \quad F(u_2) = u_1 + u_2 - u_4, \quad F(u_3) = u_1 + u_2 + u_3 - 2u_4, \quad F(u_4) = u_1 + u_2 - u_3.$$

(i) Calcula la matriz de F con respecto a la base estándar $\{1, x, x^2, x^3\}$ de $\mathbb{Q}_3[x]$.

(ii) Encuentra bases de $Ker(F)$ e $Im(F)$.

(iii) Encuentra una base de $Ker(F) \cap Im(F)$ y, sin calcular explícitamente $Ker(F) + Im(F)$, decide si $Ker(F) + Im(F) = \mathbb{Q}_3[x]$.

(iv) Encuentra una base de $Im(F)/(Ker(F) \cap Im(F))$.

(v) Sea $q(x) = 1 + x - x^2 - 6x^3$. Demuestra que $q \in Im(F)$ y encuentra las coordenadas de la clase $[q] \in Im(F)/(Ker(F) \cap Im(F))$ con respecto a la base encontrada en el apartado anterior.

Ejercicio 4. Consideramos la matriz con coeficientes racionales

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 6 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(i) Demuestra que el polinomio característico de A es $x^4 - x^3$.

(ii) Determina si A es diagonalizable o no.

(iii) Determina la forma canónica de Jordan J de A.

(iv) Si J tiene coeficientes racionales, encuentra una base de $\mathbb{Q}^4$ respecto a la cual el endomorfismo de $\mathbb{Q}^4$ definido por A tenga matriz de Jordan J y una matriz P tal que $AP = PJ$.

(v) Calcula el polinomio mínimo de A.