ÁLGEBRA LINEAL

Grado en Matemáticas
Curso 2013–14

Examen
28-11-2013
Grupo 716

APELLIDOS, NOMBRE: ______________________________

Razonar debidamente las respuestas

	Ejercicio 1	**Ejercicio 2**	total		**FINAL**
	2 puntos	6 puntos	8 puntos	$\times 1{,}25$	10

Problema 1. Decide de manera razonada si la siguientes afirmación es verdadera o falsa.
Sea V un $\mathbb{C}$-espacio vectorial de dimensión finita n, $\mathcal{B} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ una base de V y $v_1, \cdots, v_n \in V$ vectores tales que $det_{(u_i)}(v_1, \ldots, v_n) = 2 - 3i$. Entonces, si $f : V \longrightarrow V$ es el único homomorfismo tal que $f(u_i) = v_i$ para $i = 1, \ldots, n$, se tiene necesariamente $Ker(f) = \{0\}$.

Problema 2. En el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $V = Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$, sean

$$\mathcal{E} = \left\{ E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\},$$

$$\mathcal{U} = \left\{ U_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, U_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, U_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, U_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(i) Demuestra que $\mathcal{U}$ es una base de V.

(ii) Escribe la matriz con respecto a la base $\mathcal{E}$ [sabemos que es base, no hace falta que lo demuestres] de la única aplicación lineal $f : V \longrightarrow V$ para la que

$$f(U_1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, f(U_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, f(U_3) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, f(U_4) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

[SUGERENCIA: Busca directamente una manera directa de escribir los elementos de $\mathcal{E}$ en términos de los de $\mathcal{U}$. En el fondo esto ES buscar la matriz de cambio de base, pero quizás sea más fácil no escribirlo como matriz.]

iii) Sea $g : V \longrightarrow V$ dada por $g(M) = M + M^t$ para toda $M \in V$. Demuestra que g es lineal y escribe su matriz con respecto a la base $\mathcal{E}$.

(iv) Calcula $det(f)$.

(v) Encuentra una base para $Im(f)$.

(vi) Encuentra una base para $Ker(g \circ f)$.