ÁLGEBRA LINEAL

(Grupo 711 - Modelo A)

Grado en Matemáticas
Curso 2013–14

Examen
28-11-2013

APELLIDOS, NOMBRE: ______________________________

Razonar debidamente las respuestas	**Problema 1**	**Problema 2**	semi		**FINAL**
	2 puntos	6 puntos	8 puntos	$\times 1{,}25$	10

Problema 1. Decide de manera razonada si la siguiente afirmación es verdadera o falsa.

- Sea V un $\mathbb{K}$- espacio vectorial, y $\{u_1, \ldots, u_n\}$ una base de V. Definimos la familia de vectores de V de la manera siguiente:

$$v_i = u_1 + \cdots + u_i \quad , \quad i = 1, \ldots, n.$$

Entonces los vectores $\{v_1, \ldots, v_n\}$ son una base de V.

Problema 2. Sea $f : \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow M_2(\mathbb{R})$ la aplicación lineal definida por

$$f(p(x)) = \begin{pmatrix} 0 & p(1) \\ p'(0) + p(1) & p(2) \end{pmatrix}.$$

(i) Sea $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ y $\mathcal{B}_c$ la base canónica de $M_2(\mathbb{R})$. Calcular $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}_c}(f)$.

(ii) Calcular la dimensión de $Ker(f)$.

(iii) Calcular la dimensión de $Im(f)$.

(iv) Decide si f es un monomorfismo, epimorfismo, isomorfismo y/o endomorfismo.

(v) Sea $\mathcal{B}' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$. Calcular $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(f)$.

(vi) Calcular $det(g \circ f)$ donde $g : M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}_2[x]$ es la aplicación lineal determinada por:

$$g\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = x^2 + 2\,, \qquad g\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = x^2 + 1\,, \qquad g\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = x^2 + 1\,, \qquad g\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1\,.$$

ÁLGEBRA LINEAL
(Grupo 711 - Modelo B)

Grado en Matemáticas
Curso 2013–14

Examen
28-11-2013

Apellidos, Nombre: ______________________________

Razonar debidamente las respuestas	Problema 1	Problema 2	semi		FINAL
	2 puntos	6 puntos	8 puntos	$\times 1{,}25$	10

Problema 3. Decide de manera razonada si la siguiente afirmación es verdadera o falsa.

- Sea V un K-espacio vectorial, $\{u, v\}$ una base de V y $a, b, c, d \in K$ tal que $ad - bc \neq 0$. Entonces $\{au + bv, cu + dv\}$ es también base de V.

Problema 4. Sea $g : M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}_2[x]$ la aplicación lineal definida por

$$g\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a+c)x^2 + cx + (a+b+d).$$

(i) Sea $\mathcal{B}_c$ la base canónica de $M_2(\mathbb{R})$ y $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$. Calcular $M_{\mathcal{B}_c\mathcal{B}}(g)$.

(ii) Calcular la dimensión de $Ker(g)$.

(iii) Calcular la dimensión de $Im(g)$.

(iv) Decide si g es un monomorfismo, epimorfismo, isomorfismo y/o endomorfismo.

(v) Sea $\mathcal{B}' = \{x^2 + x + 1, x - 1, x^2 + 2x + 1\}$. Calcular $M_{\mathcal{B}_c\mathcal{B}'}(g)$.

(vi) Calcular $det(g \circ f)$ donde $f : \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ es la aplicación lineal determinada por:

$$f(x^2+x+1) = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}, \qquad f(x-1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad f(x^2+2x+1) = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}.$$