

Diagonalización de endomorfismos.

1. Dados los siguientes endomorfismos

$$\begin{aligned}
 f_1 : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2, & f_1(x, y) &= (y, x), \\
 f_2 : \mathbb{C}^2 &\longrightarrow \mathbb{C}^2, & f_2(x, y) &= (y, -x), \\
 f_3 : \mathbb{Q}^2 &\longrightarrow \mathbb{Q}^2, & f_3(x, y) &= (x - y/2, y - 2x), \\
 f_4 : \mathbb{F}_2^2 &\longrightarrow \mathbb{F}_2^2, & f_4(x, y) &= (x, x + y), \\
 f_5 : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3, & f_5(x, y, z) &= (3y + 9z, x/3 + 5z, x/9 + y/3), \\
 f_6 : \mathbb{Q}^3 &\longrightarrow \mathbb{Q}^3, & f_6(x, y, z) &= (6x - 7y - 20z, -8z, x - y), \\
 f_7 : \mathbb{C}^3 &\longrightarrow \mathbb{C}^3, & f_7(x, y, z) &= (2x + y + z, 2x + 3y + 2z, 4x + 4y + 3z), \\
 f_8 : \mathbb{F}_2^3 &\longrightarrow \mathbb{F}_2^3, & f_8(x, y, z) &= (x + y, x + z, y + z), \\
 f_9 : \mathbb{R}_3[x] &\longrightarrow \mathbb{R}_3[x], & f_9(p(x)) &= p'(x), \\
 f_{10} : M_2(\mathbb{F}_2) &\longrightarrow M_2(\mathbb{F}_2), & f_{10} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & a + b \\ a + b + d & b + c + d \end{pmatrix}, \\
 f_{11} : W &\longrightarrow W, & f_{11}(x, y, z) &= (3x + y, 2z, y - x), \quad \text{donde } W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}.
 \end{aligned}$$

Se pide para cada endomorfismo lo siguiente:

- (i) Calcular los autovalores y autovectores.
- (ii) Estudiar si es diagonalizable o no sobre el cuerpo base.
- (iii) En caso de que sea diagonalizable:
 1. Encontrar una base \mathcal{B} formada por autovectores.
 2. Escribir la matriz diagonal D del endomorfismo con respecto a \mathcal{B} .
 3. Dar explícitamente la relación entre la matriz D y la matriz del endomorfismo que hayas utilizado para calcular el polinomio característico.

2. Determinar en cada caso una base de \mathbb{R}^n (o de \mathbb{C}^n) en la que las matrices dadas a continuación diagonalicen.

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}, \quad A_5 = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}, \\
 A_6 &= \begin{pmatrix} 5 & 3 & -3 \\ 3 & -3 & -1 \\ -3 & -1 & -3 \end{pmatrix}, \quad A_7 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_8 = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_9 = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -3 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

3. Estudiar según el parámetro $a \in \mathbb{R}$ la diagonalización del endomorfismo de \mathbb{R}^3 que, en la base canónica, tiene la matriz

$$\begin{pmatrix} -1 & -3 & -3 \\ 3 & 5 & 3 \\ -3 & -3 & a \end{pmatrix}$$

4. Dadas las matrices de $M_3(\mathbb{R})$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Se pide:

- (i) Demostrar que ambas tiene los mismos autovalores.
- (ii) ¿Pueden representar el mismo endomorfismo de \mathbb{R}^3 , quizás en bases distintas?

5. Dadas las matrices

$$A_1 = \begin{pmatrix} 5/2 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \quad y \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

calcula:

- (i) A_k^{10} para $k = 1, 2$.
- (ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} A_k^n$ para $k = 1, 2$.

6. Sea V un K -espacio de dimensión n , $f : V \rightarrow V$ un endomorfismo de V , A la matriz de f con respecto a alguna base de V y $p_f(x) = \det(A - xI_n)$ el polinomio característico de f . Entonces

- (i) $p_f(x) = (-1)^n x^n + (-1)^{n-1} \text{traza}(A)x^{n-1} + \dots + \det(A)$, donde $\text{traza}(A)$ es la suma de los elementos de la diagonal de A .
- (ii) Demostrar que si B es otra matriz de f con respecto a otra base de V , entonces $\text{traza}(B) = \text{traza}(A)$, y por lo tanto podemos definir $\text{traza}(f) = \text{traza}(A)$ que no depende de la matriz elegida.

7. Sea A una matriz cuadrada con coeficientes en un cuerpo K . Demuestra que A y A^t tienen el mismo polinomio característico y por tanto los mismos autovalores (en K o en “el cierre algebraico de K ”).

8. Sea V un K -espacio vectorial de dimensión finita y $f : V \rightarrow V$ un endomorfismo. Demuestra:

- (i) f es biyectiva si y sólo si 0 no es valor propio de f .
- (ii) λ es valor propio de f si y sólo si $-\lambda$ es valor propio de $-f$.
- (iii) Si $f^2 = f$, entonces $\{\text{valores propios de } f\} \subset \{0, 1\}$.
- (iv) Si $f^2 = f$ y f es biyectiva, entonces 1 es el único valor propio de f .
- (v) Si $f^2 = id$, entonces $\{\text{valores propios de } f\} \subset \{1, -1\}$.

9. Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$ y definamos los endomorfismos $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ definido por $f(v) = Av^t$ y $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ definido por $g(v) = Av^t$.

- (i) Demostrar que si $v = (z_1, \dots, z_n) = (x_1 + iy_1, \dots, x_n + iy_n) \in \mathbb{C}^n$ es un vector propio con valor propio $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2 \in \mathbb{C}$ de f , entonces $\bar{v} = (\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n) = (x_1 - iy_1, \dots, x_n - iy_n)$ es vector propio de f de autovalor $\bar{\lambda} = \lambda_1 - i\lambda_2$.
- (ii) Sean $u_1 = (x_1, \dots, x_n), u_2 = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Demostrar que el subespacio vectorial $V = \langle u_1, u_2 \rangle_{\mathbb{R}} \subset \mathbb{R}^n$ es invariante por el endomorfismo g . Demostrar que la matriz de $g|_V$ respecto de la base $\mathcal{B} = \{u_1, u_2\}$ es $\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ -\lambda_2 & \lambda_1 \end{pmatrix}$, llamada forma canónica real.
- (iii) Encontrar la forma canónica real para las siguientes matrices:

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

10. Llamaremos *matriz estocástica* a una matriz cuadrada $M = (p_{i,j}) \in M_n(\mathbb{R})$ con coeficientes $p_{i,j} \geq 0$ y tal que la suma de los elementos de cada columna es 1, es decir $\sum_{i=1}^n p_{i,j} = 1$ para cada $j = 1, \dots, n$ (observa que esto implica $1 \geq p_{i,j} \geq 0$). Por otra parte, dado un vector $v = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ definimos la *norma infinito de v* como

$$\|v\|_{\infty} := \max\{|x_i| : i = 1, \dots, n\}.$$

Si M es una matriz estocástica, demuestra:

- (i) 1 es autovalor de M
- (ii) Para cualquier $v \in \mathbb{C}^n$, se tiene $\|M^t v\|_{\infty} \leq \|v\|_{\infty}$. (OJO: aquí la matriz es M^t , que es “estocástica por filas”.)
- (iii) Cualquier autovalor, real o complejo, λ de M^t satisface $\|\lambda\| \leq 1$.
- (iv) Cualquier autovalor, real o complejo, λ de M satisface $\|\lambda\| \leq 1$.
- (v) $(1, \dots, 1)$ es autovector de M^t , ¿para qué autovalor? ¿Es $(1, \dots, 1)$ necesariamente autovector de M ?