

## Determinantes.

1. Sea  $A$  una matriz cuadrada cuyo determinante vale 9. Determinar, si es posible, el determinante de las matrices  $A^5$ ,  $A^{-1}$  y  $7A$ .
2. Demuestra, sin calcularlos, que los siguientes determinantes son nulos (en algún caso conviene hacer alguna transformación).

$$(i) \begin{vmatrix} x & y & 2x+3y \\ 4 & 3 & 17 \\ z & t & 2z+3t \end{vmatrix}, \quad (ii) \begin{vmatrix} \operatorname{sen}^2 a & 1 & \operatorname{cos}^2 a \\ \operatorname{sen}^2 b & 1 & \operatorname{cos}^2 b \\ \operatorname{sen}^2 c & 1 & \operatorname{cos}^2 c \end{vmatrix}, \quad (iii) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}, \quad (iv) \begin{vmatrix} 1^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 2^2 & 3^2 & 4^2 & 5^2 \\ 3^2 & 4^2 & 5^2 & 6^2 \\ 4^2 & 5^2 & 6^2 & 7^2 \end{vmatrix}.$$

### 3. Determinante de Vandermonde:

Sean  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$ , demostrar la igualdad

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & & x_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{i < j} (x_j - x_i)$$

(Sugerencia: Razonar por inducción. Empezar restando a cada columna la anterior multiplicada por  $x_1$ )

4. Sea  $A$  la matriz cuadrada definida por  $a_{ij} = |i - j|$ . Demostrar  $|A| = (-1)^{n-1} (n-1) 2^{n-2}$ .

(Sugerencia: Empezar restando a cada columna la anterior.)

5. Demostrar

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n \\ 1 & 3 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n \\ 1 & 2 & 4 & 4 & \dots & n-1 & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n & n \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n+1 \end{vmatrix} = \frac{n(n+1)+2}{2}$$

(Sugerencia: sumar primero todas las columnas.)

6. Demuestra que  $(x-1)^3$  divide al polinomio  $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \end{vmatrix}$ .

7. Sabiendo que 58786, 30628, 12831, 80743 y 16016 son divisibles por 13, demostrar que

$$\begin{vmatrix} 5 & 8 & 7 & 8 & 6 \\ 3 & 0 & 6 & 2 & 8 \\ 1 & 2 & 8 & 3 & 1 \\ 8 & 0 & 7 & 4 & 3 \\ 1 & 6 & 0 & 1 & 6 \end{vmatrix}$$

es también divisible por 13.

8. Calcula utilizando menores el rango de la matriz con coeficientes en  $\mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & a-2 & 4 & a \\ 1 & a-1 & 2 & a^2 \end{pmatrix}.$$

9. Sea  $A$  una matriz  $n \times n$  con coeficientes en  $K$ .

- (i) Prueba que  $\det(-A) = (-1)^n \det(A)$ .
- (ii) Sea  $\text{adj}(A)$  la matriz adjunta, es decir, la que tiene como coeficientes los adjuntos de los coeficientes de  $A$ . Demuestra que  $|\text{adj}(A)| = |A|^{n-1}$ . (Sugerencia: recuerda cuanto vale  $A \cdot \text{adj}(A)^t$ ).
- (iii) Diremos que  $A$  es *hemisimétrica* si  $a_{ij} = -a_{ji}$  para cualesquiera  $i, j$  (piensa qué quiere decir esto para los coeficientes de la diagonal de  $A$ ). Demuestra que si  $A$  es hemisimétrica entonces  $\det(A) = (-1)^n \det(A)$ . Concluye que si  $A$  es hemisimétrica y  $n$  es impar, entonces  $\det(A) = 0$ .

10. Resolver usando la Regla de Cramer::

$$(i) \begin{cases} 3x + 2y + 4z = 1 \\ 2x - y + z = 0 \\ x + 2y + 3z = 1 \end{cases} \quad (ii) \begin{cases} 3x + 2y + 4z + t = 1 \\ 2x - y + z - 3t = 6 \\ x + 2y + 3z - t = 1. \end{cases}$$

11. Sea  $f : M_2(\mathbb{R}) \rightarrow M_2(\mathbb{R})$  definida como

$$f \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + 5b & b + 3c + 2d \\ c - d & d \end{pmatrix}$$

- (i) Calcular la matriz de  $f$  respecto de la base canónica de  $M_2(\mathbb{R})$ .
- (ii) Calcular la matriz de  $f$  respecto a la siguiente base de  $M_2(\mathbb{R})$ :

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

- (iii) Calcular los determinantes de las matrices halladas en los apartados (i) y (ii).

12. Calcula el determinante de los siguientes endomorfismos:

- (i)  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  definida por  $f(z) = z - \bar{z}$ , donde si  $z = x + iy$ ,  $\bar{z} = x - iy$  es su conjugado, y vemos  $\mathbb{C}$  como un  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial (OBSERVACION:  $f$  es  $\mathbb{R}$ -lineal, luego la pregunta tiene sentido).
- (ii)  $g : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$  definida por  $f(z_1, z_2) = (z_1 + z_2, z_1 + iz_2)$  visto como un homomorfismo de  $\mathbb{C}$ -espacios vectoriales y también visto como un homomorfismo de  $\mathbb{R}$ -espacios vectoriales.
- (iii) Consideramos el subespacio  $E = \langle \text{sen}(x), \text{cos}(x) \rangle_{\mathbb{R}}$  del  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial de las funciones de  $\mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}$ . Calcula el determinante del endomorfismo de  $E$  definido por la derivación.

13. Sea  $f : M_{2 \times 3}(\mathbb{C}) \rightarrow M_{2 \times 3}(\mathbb{C})$  el endomorfismo definido por

$$f \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & 2b & 4c \\ 3a' & 3b' & 4c' \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} \in M_{2 \times 3}(\mathbb{C}) \mid \begin{array}{l} a + b = 0 \\ a' + b' = 0 \\ c + c' = 0 \end{array} \right\}.$$

- (i) Demostrar que  $f$  induce un endomorfismo  $f|_W : W \rightarrow W$  definido por la misma fórmula que  $f$ . Calcular su determinante.
- (ii) Probar que  $f$  induce también un endomorfismo  $\bar{f}$  del espacio cociente  $M_{2 \times 3}(\mathbb{C})/W$ . Calcular su determinante.
- (iii) Relacionar los determinantes de  $f$ ,  $\bar{f}$  y  $f|_W$ .