ÁLGEBRA LINEAL

(25-9-2013)

Grado en Matemáticas
Curso 2013–14

Hoja nº 3

Espacios vectoriales.

1. En $\mathbb{R}^2$ se define la operación suma habitual y el producto $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ por un escalar $\alpha \in \mathbb{R}$ mediante:

(i) $\alpha \cdot (x, y) = (\alpha x, 0)$. (ii) $\alpha \cdot (x, y) = (\alpha^2 x, \alpha^2 y)$.
(iii) $\alpha \cdot (x, y) = (x, y)$. (iv) $\alpha \cdot (x, y) = (\alpha x, y)$.

Decidir en cada caso si $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial.

2. En $\mathbb{R}^2$ se define la operación suma habitual y el producto $\cdot : \mathbb{C} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ por un escalar $\alpha = a + b\,i \in \mathbb{C}$ mediante: $\alpha \cdot (x, y) = (ax - by, bx + ay)$. Decidir si $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ es un $\mathbb{C}$-espacio vectorial.

3. Sea K un cuerpo y $(V, +, \cdot)$ un K-espacio vectorial. Demostrar las siguiente afirmaciones:

(i) El elemento neutro de un espacio vectorial es único. Lo denotaremos por $\mathbf{0}_V$.

(ii) El opuesto de cada elemento en un espacio vectorial es único.

(iii) Sea $0 \in K$. Para todo $u \in V$ se tiene $0 \cdot u = \mathbf{0}_V$.

(iv) Sea $-1 \in K$. Para todo $u \in V$ se tiene $(-1) \cdot u$ es el opuesto de u.

(v) Para todo $k \in K$ se tiene $k \cdot \mathbf{0}_V = \mathbf{0}_V$.

4. Determinar cuáles de los siguientes subconjuntos son subespacios vectoriales (sobre el cuerpo "obvio" en cada caso):

$W_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 5x = \sqrt{2}y\}$, $W_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \,|\, xy + z = x\}$,
$W_3 = \{(x, y) \in \mathbb{Q}^2 \,|\, x = 7n \text{ para algún } n \in \mathbb{Z}\}$, $W_4 = \{(x, y) \in \mathbb{F}_2^2 \,|\, x = y + 1\}$,
$W_5 = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] \,|\, \mathit{grado}(p(x)) \text{ par}\}$, $W_6 = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] \,|\, p(5) = 0\}$,
$W_7 = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] \,|\, p(1) \in \mathbb{Z}\}$, $W_8 = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] \,|\, p(x) = p(-x)\}$,
$W_9 = \{A \in M_{3x4}(\mathbb{R}) \,|\, \mathit{rango}(A) = 3\}$, $W_{10} = \{A \in M_3(\mathbb{R}) \,|\, A^2 = 0\}$,
$W_{11} = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \,|\, A = A^t\}$, $W_{12} = \{A \in M_3(\mathbb{R}) \,|\, A^2 = A\}$,

5. Determinar si estos subconjuntos del espacio $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (también se denota por $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$) formado por las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son $\mathbb{R}$-subespacios vectoriales

$W_1 = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,|\, f \text{ derivable y } f'(2) = 0\}$, $W_2 = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,|\, f \text{ continua y } \int_0^1 f(x)dx = 0\}$,
$W_3 = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,|\, f(\sqrt{2})f(11) = 0\}$, $W_4 = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,|\, f(\sqrt{2}) = -f(11)\}$.

6. Determinar qué subconjuntos son $\mathbb{R}$-subespacios vectoriales o $\mathbb{C}$-subespacios vectoriales:

$W_1 = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| \leq 1\}$, $W_2 = \{z \in \mathbb{C} \,|\, z + \overline{z} = 0\}$,
$W_3 = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \,|\, z + 3iw = 0\}$, $W_4 = \{(x, w) \in \mathbb{C}^2 \,|\, w \in \mathbb{R}\}$,

7. Sea W el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por $(1, 2, -5, 3)$ y $(2, -1, 4, 7)$. Se pide

(i) Determinar si el vector $(0, 0, -37, -3)$ pertenece a W.

(ii) Determinar para qué valores de α y β el vector $(\alpha, \beta, -37, -3) \in W$.

8. Determina para qué valor de $\alpha \in \mathbb{R}$ los tres vectores de $\mathbb{R}^4$

$$v_1 = (3, 1, -4, 6), \quad v_2 = (1, 1, 4, 4), \quad v_3 = (1, 0, -4, \alpha)$$

son linealmente dependientes.

9. Determina si los vectores $u_1 = (10, -4, 4, 10)$ y $u_2 = (-8, -2, 9, -15)$ pertenecen al subespacio vectorial $W \subset \mathbb{R}^4$ generado por $v_1 = (2, 1, 1, 4), v_2 = (-4, -3, 0, -7)$ y $v_3 = (0, 0, -1, -1)$.

10. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo K. Demuestra que dos vectores v_1 y v_2 en $V \setminus \{\vec{0}\}$ son linealmente dependientes si y sólo si existe $k \in K$ tal que $v_2 = kv_1$.

11. Considera el $\mathbb{R}$-espacio vectorial de las funciones continuas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Demuestra que las funciones $f_1(x) = cos(x)$ y $f_2(x) = sen(x)$ son linealmente independientes.

12. Demuestra que si V es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$, entonces $V = \{\vec{0}\}$, o V es una recta que pasa por el origen, o V es un plano que pasa por el origen o $V = \mathbb{R}^3$.

13. Calcula la dimensión y da una base para cada uno de los subespacios vectoriales del ejercicio **4**.

14. Construye una base de $\mathbb{R}^4$ que contenga a los vectores $(2, -2, 3, 1)$ y $(-1, 4, -6, -2)$.

15. Sea $\mathbb{R}_3[x] = \{p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \, : \, a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}$.

(i) Demuestra que $\mathcal{B} = \{x^3 + 4x, 3x^2 + 4, 6x, 6\}$ es una base de $\mathbb{R}_3[x]$ y calcular las coordenadas de $p(x) = 2 + 2x - x^2 - x^3$ en $\mathcal{B}$.

(ii) Sea $W = \{(a-b) + 2ax + bx^2 + (a+2b)x^3 \, : \, a, b \in \mathbb{R}\}$. Demuestra que W es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}_3[x]$. Calcular una base de W.

16. Sea $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \right\} \subset M_2(\mathbb{R})$.

(i) Demostrar que $\mathcal{B}$ es una base de $M_2(\mathbb{R})$.

(ii) Dar las coordenadas de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ en la base $\mathcal{B}$ y en la base canónica de $M_2(\mathbb{R})$.