ÁLGEBRA 2

(Examen Ordinario)

Grado en Físicas
Curso 2013–14

Examen
9-5-2014

APELLIDOS, NOMBRE: ______________________________

Grupo
51 _

Razonar debidamente las respuestas	⋄⋄⋄	Ejercicio 1	Ejercicio 2	Ejercicio 3	Ejercicio 4	FINAL
		2 puntos	3 puntos	2.5 puntos	2.5 puntos	10

---

1. Decide de manera razonada si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

(i) Sean $A, B \in M_3(\mathbb{R})$ tales que tienen el mismo polinomio característico. Entonces existe $P \in M_3(\mathbb{R})$ invertible tal que $AP = PB$.

(ii) Sean $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio euclídeo y $w \in V$ un vector unitario (es decir, $\|w\| = 1$). La aplicación $f : V \to V$ definida por $f(u) = u - 2\langle u, w\rangle w$ es ortogonal.

---

2. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -6 & -10 \\ 4 & -3 & -5 \\ 4 & -3 & -5 \end{pmatrix}.$$

(i) Calcula el polinomio característico de A. ¿Qué rango tiene A?.

(ii) Determina si A es diagonalizable o no.

(iii) Determina la forma canónica de Jordan J de A.

(iv) Encuentra una base de $\mathbb{R}^3$ respecto a la cual el endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ definido por A tenga matriz de Jordan J y una matriz P tal que $AP = PJ$. ¿Qué representa la matriz P?

3. Sea $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forma cuadrática que tiene la expresión siguiente en la base canónica :

$$Q(x, y, z) = x^2 + 2\sqrt{a}xy + 2y^2 - 2yz + \frac{a+1}{2}z^2.$$

(i) Para $a = 1$, encontrar una base de $\mathbb{R}^3$ en la que Q diagonalice. Calcula su signatura y su rango.

(ii) Estudia para qué valores de $a \in \mathbb{R}$ la forma cuadrática Q es definida positiva/definida negativa.

---

4. En el espacio afín euclídeo $\mathbb{R}^3$ (con el producto escalar usual), definimos la aplicación afín $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuya expresión matricial con respecto al sistema de referencia $\mathcal{R}_c = \{(0,0,0); \mathcal{B}_c\}$ (donde $\mathcal{B}_c$ es la base canónica de $\mathbb{R}^3$) es:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

(i) Calcular la matriz respecto de la base canónica de la aplicación lineal $\overrightarrow{f}$.

(ii) Determinar si $\overrightarrow{f}$ es una aplicación ortogonal o no. En caso afirmativo, clasificarla geométricamente.

(iii) Demostrar que f es un movimiento y clasificarlo encontrando sus elementos geométricos.
